ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

onde, se sono verificate le (10), φ non potrà dipendere altro che da s. In conseguenza avremo

$$E_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \cos(l_z n_z)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \operatorname{sen}(l_z l_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

cioè

$$E_n = \frac{1}{1 - fr \cos \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Evidentemente questa eguaglianza non è compatibile colla (11) altro che quando sia $f = 0$. Ciò porta immediatamente a conclusioni che coincidono con quelle del § precedente, riferite al caso limite $\theta = 0$.

§ 6. Prima di terminare sarà forse opportuno richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che la resistenza effettiva di un tratto di filo conduttore limitato da due sezioni normali può, se il filo non è rettilineo, risultare inferiore alla sua resistenza ohmica [1]: questo, perchè nella presente ricerca non appaia come una restrizione inutile o ingiustificata l'aver riferito resistenza effettiva e resistenza ohmica ad una sezione normale del filo (cioè, sostanzialmente, a un tratto di filo limitato da una sezione normale e da una sezione ad essa parallela e infinitamente prossima).

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota I di N. Zeilon, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella sua Memoria sulle equazioni integro-differenziali il prof. Volterra [2] ne inizia lo studio sistematico coll'applicare il metodo di Green all'equazione tipica di genere ellittico:

$$\text{(I)} \qquad Au = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2} +$$

$$+ \int \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right] d\tau = 0.$$

Il primo problema che si incontra consiste nel formare la *soluzione fondamentale* della (I), la quale viene calcolata, nella detta Memoria, me-

(1) V. A. Signorini, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale* (Questi Rend., vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem.).

(2) *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* Acta math., tom 35.

diante uno sviluppo in serie. In questa breve Nota mi permetto di trattare lo stesso problema con un metodo che si applica in casi assai generali d'equazioni alle derivate parziali [1]. Ottengo, nel caso dell'equazione (I), un'espressione di forma differente da quella del Volterra, ma l'identità dei resultati si prova senza difficoltà.

2. Procedendo come se si trattasse di un'equazione differenziale a coefficienti costanti, sostituiamo alla (I) la stessa equazione

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{A}u = \varrho(x\,,y\,,z\,;t)$$

con un secondo membro, funzione arbitraria di $x\,,y\,,z\,,t$, e cerchiamone una soluzione qualunque, scritta nella forma

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\tau} \varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu\,;\tau)\,\mathrm{F}(x-\lambda\,,y-\mu\,,z-\nu|t\,,\tau)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,d\tau\,.$$

Chiamiamo, per analogia, F l'*integrale fondamentale* dell'equazione (I).

Nel metodo ricordato si sostituisce alla funzione ϱ la sua rappresentazione mediante l'integrale multiplo del Fourier. Seguendo questa idea, poniamo:

$$(1) \qquad \varrho = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varrho(\lambda\,,\mu\,.\,\nu\,;t)\,\times$$
$$\times\, e^{i(\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu))}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\,,$$

e si vede che la risoluzione della (II) viene ridotta a quella dell'equazione

$$\mathrm{A}u = \varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu\,;t)\,e^{i(\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu))}\,,$$

di cui la soluzione sia

$$u = x(\alpha\,,\beta,\gamma\,;\lambda\,,\mu\,,\nu\,;t) = x(t)\,.$$

Troviamo:

$$(2) \qquad x(t) + \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\int(\alpha^2 f+\beta^2\varphi+\gamma^2\psi)\,x(\tau)\,d\tau =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\,.\,\varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu\,;t)\,,$$

equazione integrale in cui possiamo supporre il limite superiore o variabile (tipo del Volterra) o costante (tipo del Fredholm).

[1] Vedi Zeilon, *Das Fundamentalintegral der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*, Arkiv f. Mathematick, Astronomie u. Fysik. Stocolma 1911; *Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la physique mathématique*, Arkiv f. Matematik ecc., Stocolma 1913.

3. Sia $D'(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)$ il nucleo risolvente dell'equazione (2); avremo:

$$(3) \qquad x(t) = \frac{-1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \times$$
$$\times \left(\varrho(\lambda, \mu, \nu; t) + \int D'(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau \right),$$

relazione che più comodamente si scrive

$$(3') \qquad x(t) = \frac{-1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \int D(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau$$
$$D = \varepsilon(t, \tau) + D',$$

denotando con $\varepsilon(t, \tau)$ una funzione (definita mediante un'espressione di limite conveniente) soggetta alla condizione che

$$\int \varepsilon(t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau = \varrho(\lambda, \mu, \nu; t).$$

La soluzione della (II) si scrive adesso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; t) \times$$
$$\times\, e^{i[\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu)]}\, d\alpha\, d\beta \ldots d\nu,$$

e si forma evidentemente nel modo desiderato per mezzo d'un integrale fondamentale F, la cui espressione, scrivendo x invece di $x-\lambda$ ecc., sarà la parte reale di

$$\text{(III)} \quad F(x, y, z | t, \tau) =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

4. La convergenza dell'integrale (III) può discutersi come nei casi analoghi delle equazioni differenziali di tipo ellittico. Si osserva che c'è una singolarità nel punto $\alpha = \beta = \gamma = 0$; quindi bisogna definire un valore principale evitando questa singolarità, il che può farsi in modi diversi. Supponiamo, per es., che la integrazione rispetto a γ si eseguisca fra $-\infty$ e $-\delta$, e fra $+\delta$ e $+\infty$, δ essendo una piccola quantità positiva: invece di (III), prendiamo il limite per $\delta = 0$ dell'espressione risultante.

Nel caso d'un'equazione del tipo del Volterra, la convergenza è accertata, D essendo allora una funzione sempre finita, almeno per i valori finiti delle α, β, γ. Ora l'equazione (2) fa vedere che D è funzione omogenea, d'ordine zero, di α, β, γ; quindi la funzione sotto il segno $\int$ si comporta, per i valori grandi di α, β, γ, come la funzione

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

e la convergenza dell'integrale (III) risulta dalla convergenza dell'integrale conosciuto:

$$\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=\frac{-1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Al contrario, nel caso d'un'equazione (2) del tipo del Fredholm, la D' potrà possedere dei poli reali, di modo che la definizione del valore principale dovrebbe forse modificarsi.

5. L'espressione (III) si semplifica con un calcolo in cui interviene la omogeneità della funzione D. Osservando che essa è una funzione reale, la quale contiene γ alla seconda potenza, abbiamo facilmente:

$$\mathrm{F}=-\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{D}(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,|\,t\,.\,\tau)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,;$$

e scrivendo $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ invece di α, β, troviamo:

$$\mathrm{F}=-\frac{1}{4\pi^3 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{D}(\alpha\,,\beta\,,1\,|\,t\,,\tau)}{\alpha^2+\beta^2+1}\cos\gamma(\alpha x+\beta y+z)\,d(\alpha x)\,d\beta\,d\gamma\,.$$

Ma adesso la integrazione rispetto ad αx e γ si riguardi come costituente un integrale doppio del Fourier, di modo che

$$\text{(IV)}\qquad \mathrm{F}=-\frac{1}{4\pi^2 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{D}\left(-\dfrac{\beta y+z}{x},\beta\,,1\,|\,t\,,\tau\right)}{\left(\dfrac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1}\,d\beta\,,$$

integrale semplice che richiede la conoscenza del nucleo risolvente dell'equazione integrale

$$\text{(4)}\qquad x(t)+\frac{1}{\left(\dfrac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1}\times$$
$$\times\int\left[\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2 f+\beta^2\varphi+\psi\right]x(\tau)\,d\tau=\mu(t)\,.$$