ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Riassumendo i dati precedenti noi troviamo:

TAB. 4ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 85,0$;
Mobilità $HCO_3' = 85,0 - 43,6 = \mathbf{41,4}$

TAB. 5ª. Conduttività limite $KHCO_3$, $\mu_\infty = 104.1$;
Mobilità $HCO_3' = 104.1 - 64.7 = \mathbf{39,4}$

TAB. 6ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 81,6$;
Mobilità $HCO_3' = 81,6 - 43,6 = \mathbf{38.0}$

TAB. 7ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 82,9$;
Mobilità $HCO_3' = 82,9 - 43,6 = \mathbf{39,3}$

TAB. 8ª. Conduttività limite $KHCO_3$, $\mu_\infty = 104\,0$;
Mobilità $HCO_3' = 104,0 - 64,7 = \mathbf{39,3}$

I valori 43,6 e 64,7 corrispondono alle mobilità rispettive del sodioione e del potassioione, quali risultano dai dati più recenti di Kohlrausch.

Dalla media dei valori surriferiti, accordando però maggior valore alle ultime due misure, risulta che *la mobilità dell'ione* HCO_3' *alla temperatura 18° è eguale a 39,3* valore alquanto inferiore a quello trovato da Walker e Cormack (41,4) senza la correzione dell'idrolisi, ed a quello trovato da noi nella prima serie delle nostre ricerche (40,8), misurando soluzioni acquose di bicarbonato, e correggendo i dati per l'idrolisi del sale. Da quello che precede risulta chiaro come queste divergenze sono dovute, sia alla trascuranza dell'idrolisi, sia al fatto che le soluzioni di bicarbonato, esposte per un certo tempo all'aria, perdono acido carbonico ed acquistano di mano in mano una conduttività sempre maggiore.

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota II di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

8 (*). Un sistema di $\frac{1}{2}p(p-1)$ relazioni fra i periodi $\omega_{j,k}$ del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots p\,;\, j < k), \tag{5}$$

dove le $c_{r,s}$ siano dei numeri intieri costituenti gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine $2p$, si dirà, per i periodi $\omega_{j,k}$, un *sistema di relazioni di Riemann.*

Un sistema di relazioni di Riemann (5) si dirà poi un sistema di Riemann *principale* se, indicati con

$$\xi_j + i\eta_j \qquad (i = \sqrt{-1}\ ;\ \xi_j \text{ e } \eta_j \text{ reali}\ ;\ j = 1 \dots 2p)$$

(*) La numerazione degli articoli, delle formule e delle note è fatta in continuazione di quella della Nota I.

i periodi di una combinazione lineare omogenea qualunque degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ nel fissato sistema primitivo di cicli lineari, si abbia sempre

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s > 0$$

o sempre

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s < 0 .$$

Per quanto è detto nella mia già citata Nota di Palermo ([16]), ciò equivale a dire che il sistema di relazioni di Riemann (5) è principale o non, secondo che è definita o non la forma Hermitiana nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (e nelle loro coniugate $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \ldots \bar{\lambda}_p$) data da

$$\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \sum_{j,k}^{1\ldots p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \bar{\omega}_{k,s}\, \lambda_j\, \bar{\lambda}_k .$$

Per un classico teorema di Riemann e Weierstrass, poichè le $\omega_{j,k}$ sono i periodi degli integrali $u_1, u_2, \ldots u_p$, *un sistema principale di relazioni di Riemann per le $\omega_{j,k}$ esiste certamente.*

Se i periodi $\omega_{j,k}$ sono legati dalle relazioni di due sistemi di Riemann, aventi l'uno i coefficienti $c_{r,s}$ e l'altro i coefficienti $c'_{r,s}$, i periodi stessi sono legati da tutti i sistemi di relazioni di Riemann aventi per coefficienti le $\varrho c_{r,s} + \sigma c'_{r,s}$, ove ϱ e σ sono intieri qualunque; quindi, di codesti sistemi di relazioni di Riemann, o ve n'ha uno solo — principale — (i suoi coefficienti essendo determinati a meno di un fattore di proporzionalità intero), o ve n'è tutta un'infinità discontinua assimilabile a quella dei punti razionali di uno spazio lineare.

La *caratteristica* di un sistema di relazioni di Riemann sarà la caratteristica (necessariamente pari) del relativo determinante $|c_{r,s}|$; quindi, per un teorema ben noto ([17]), la caratteristica di un sistema principale è $2p$.

9. Ora si osservi che scrivere le (5) equivale a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema nullo razionale di Σ, rappresentato dall'equazione

$$(5^{bis}) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0 ,$$

([16]) Scorza, loc. cit. [5]), n. 1.

([17]) Krazer, loc. cit. [7]), pag. 119. Del resto, questo fatto e quello invocato più sopra (cfr. la citazione [7])) son tutte e due compresi nella diseguaglianza che, coi simboli della nostra Nota di Palermo, è ivi scritta $\Delta_p > 0$ o $\Delta_1 \Delta_p > 0$.

abbia in τ (e quindi, attesa la realità delle $c_{r,s}$, anche in $\bar{\tau}$) uno spazio totale; dunque:

In Σ *esistono sempre dei sistemi nulli razionali aventi in* τ *e* $\bar{\tau}$ *due spazi totali; e se ne esiste più di uno, ne esistono senz'altro infiniti, la loro totalità potendo assimilarsi a quella (discontinua) dei punti razionali di un conveniente spazio lineare.*

Ciascuno di questi sistemi nulli razionali si dirà, per comodità di discorso, un *sistema nullo di* V_p (relativo al sistema prescelto di cicli lineari).

10. Quando dal sistema di relazioni di Riemann (5) per i periodi $\omega_{j,k}$ si passa al corrispondente sistema nullo (5^{bis}) di V_p, viene a perdersi, in quest' ultimo, ogni traccia della scelta dei p integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p. Ciò significa che il sussistere delle (5) per i periodi degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ implica il sussistere di relazioni con gli *stessi* coefficienti per i periodi di altri p *qualsiansi* integrali semplici di 1ª specie indipendenti di V_p [18]; quindi i coefficienti di un sistema di relazioni di Riemann dipendono non già dalla scelta

[18] È facile comporre una dimostrazione algebrica diretta di questa circostanza. Dagli integrali $u_1, u_2, \ldots u_p$ (coi periodi $\omega_{j,k}$) si passi agli integrali indipendenti $U_1, U_2, \ldots U_p$ (coi periodi $\Omega_{j,k}$), essendo

$$u_j = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l} U_l . \qquad (j = 1, 2, \ldots p)$$

e il determinante $|\mu_{j,l}|$ diverso da zero.

Sarà

$$\omega_{j,r} = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l} \Omega_{l,r} \qquad (j = 1, \ldots p \; ; \; r = 1, 2, \ldots 2p),$$

e quindi, posto

$$a_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s} \Omega_{l,r} \Omega_{m,s} \qquad (l, m = 1, 2, \ldots p),$$

da

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s} \omega_{j,r} \omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots p \; ; \; j < k),$$

seguirà

$$(\alpha) \qquad \sum_{l,m}^{1\ldots p} \mu_{j,l} \mu_{k,m} a_{l,m} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots p \; ; \; j < k).$$

Poichè $a_{m,l} = - a_{l,m}$, le $a_{l,m}$ distinte e non nulle sono $\frac{1}{2} p(p-1)$ e si ottengono tutte fissando di considerare soltanto quelle per cui $l < m$. Le relazioni lineari omogenee (α) che le legano sono appunto in numero di $\frac{1}{2} p(p-1)$; e in ciascuna delle (α) il coefficiente complessivo di una $a_{l,m}$ ($l < m$) è del tipo $\mu_{j,l} \mu_{k,m} - \mu_{j,m} \mu_{k,l}$, cioè è un minore del 2° ordine del determinante $|\mu_{j,l}|$. Ma allora, per un noto teorema di Sylvester, le (α) sono indipendenti, e le $a_{l,m}$ sono, come volevasi, tutte nulle.

di p integrali indipendenti fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p, ma dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p.

Per render conto di questo fatto anche col linguaggio, come parliamo di sistemi nulli di V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), parleremo anche di *relazioni di Riemann di* V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), queste ultime rispondendo biunivocamente a quelli, quando si prescinda da fattori di proporzionalità intieri. E la *caratteristica* di una relazione di Riemann di V_p sarà, naturalmente, la caratteristica di uno qualunque dei sistemi di relazioni di Riemann a cui essa dà luogo.

Ma v'è di più. Se il sistema (5) di relazioni di Riemann fra i periodi $\omega_{j,k}$ è un sistema principale, basta tener conto della prima definizione data di sistemi principali, per accorgersi che sono principali *tutti* i sistemi di relazioni di Riemann provenienti, col sistema (5), da una stessa relazione di Riemann di V_p; quindi, anzi che di sistemi di relazioni di Riemann principali o non, potremo, meglio, parlare di *relazioni di Riemann* e di *sistemi nulli — di* V_p *— principali o non.*

Notisi che i sistemi nulli principali sono tutti *non* singolari, e *di essi ne esiste sempre almeno uno.*

11. Abbiamo già detto quale sia su τ e $\overline{\tau}$ l'effetto di un cambiamento nella scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p; quindi possiamo dire, senz'altro, che il cambiare questo sistema equivale ad applicare ai sistemi nulli di V_p relativi all'antico sistemi di cicli una omografia unimodulare razionale, per la quale appunto sistemi nulli razionali vanno in sistemi nulli razionali.

Facciamo vedere che per una tale trasformazione omografica *i sistemi nulli principali si mutano in sistemi nulli principali*; dopo ciò, la nomenclatura introdotta apparirà del tutto giustificata ed opportuna, e la sua importanza verrà posta in tutta la luce desiderabile.

La cosa è intuibile *a priori*, e risulta incidentalmente dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che daremo altrove; ma si può dimostrare agevolmente col breve calcolo che segue.

Sia

$$(6) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j\,,k = 1\,,\ldots p\;;\; j<k)$$

un sistema principale di relazioni di Riemann per i periodi $\omega_{j,k}$.

Effettuando sui periodi $\omega_{j,k}$ la sostituzione unimodulare a coefficienti interi

$$(7) \qquad \omega_{j,k} = \sum_{l=1}^{l=2p} h_{k,l}\,\Omega_{j,l} \qquad (j = 1\,,2\,,\ldots p\;;\; k = 1\,,2\,,\ldots 2p)\,,$$

il sistema di Riemann (6) si muta nel sistema di relazioni di Riemann per i periodi trasformati $\Omega_{j,l}$ dato dalle equazioni

$$\sum_{l,m}^{1\dots 2p} C_{l,m}\, \Omega_{j,l}\, \Omega_{k,m} = 0 \qquad (j\,,\, k = 1\,, \dots p\ ;\ j < k)\,, \tag{8}$$

ove

$$C_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, h_{r,l}\, h_{s,m}\,.$$

Per la sostituzione (7), la forma Hermitiana

$$\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\dots 2p} \sum_{j,k}^{1\dots p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{k,s}\, \lambda_j \overline{\lambda}_k\,,$$

diventa

$$\frac{1}{2i} \sum_{l,m}^{1\dots 2p} \sum_{j,k}^{1\dots p} C_{l,m}\, \Omega_{j,l}\, \overline{\Omega}_{k,m}\, \lambda_j \overline{\lambda}_k\,;$$

dunque anche il sistema di Riemann (8) è, come (6), un sistema principale.

12. Se un sistema nullo di Σ ha in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali e ha per asse un S_{2l-1}, questo S_{2l-1} deve trovarsi con ciascuno degli spazî τ e $\overline{\tau}$ in un S_{p+l-1}, e quindi deve tagliare τ e $\overline{\tau}$ in spazî la cui dimensione non può essere inferiore a

$$(p-1) + (2l-1) - (p+l-1) = l-1\,.$$

D'altra parte, poichè τ e $\overline{\tau}$ sono indipendenti, uno spazio di τ (o di $\overline{\tau}$) di dimensione superiore ad $l-1$ non può esser congiunto a uno spazio di $\overline{\tau}$ (o di τ) di dimensione uguale o superiore ad $l-1$ da un S_{2l-1}; dunque quell' S_{2l-1} taglia τ e $\overline{\tau}$ in spazî che hanno proprio la dimensione $l-1$.

Ciò dimostra che:

Se fra i sistemi nulli di V_p *ve n'è uno dotato di asse,* V_p *ammette un sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del considerato sistema nullo.*

Questo teorema, come risulterà dalle osservazioni che seguono, è invertibile; e quindi:

I sistemi regolari di integrali riducibili di V_p *della dimensione* $q-1$ *sono tanti, quanti sono gli assi distinti (di dimensione* $2q-1$*) dei sistemi nulli singolari di* V_p *di specie* $2q$.

In base a questo risultato, si vede che lo studio della totalità dei sistemi regolari di integrali riducibili di V_p è intimamente legato a quello della varietà dei sistemi nulli o complessi lineari di Σ aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali.

Ci riserbiamo pertanto di ritornarvi quando avremo utilizzato questa stessa varietà per lo studio delle funzioni abeliane singolari: qui ci limitiamo a far osservare che è facile assegnare un massimo per la dimensione dello spazio lineare che dà coi suoi punti razionali, nel modo detto più sopra, una rappresentazione della totalità dei sistemi nulli di V_p.

Tale massimo è $p^2 - 1$, *e può essere effettivamente raggiunto.*

13. Sia Π un sistema nullo di V_p, privo di spazio singolare, e A un sistema regolare di integrali riducibili di V_p della dimensione $q - 1$; un sistema nullo come Π esiste certo, qualunque sia V_p.

L'asse A_1 di A è un S_{2q-1} razionale, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo le imagini α e $\bar{\alpha}$ di A: dunque lo spazio polare di A_1 rispetto a Π è un $S_{2(p-q)-1}$ razionale, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo due spazî imaginarii coniugati β e $\bar{\beta}$ della dimensione $p - q - 1$; ma allora questo $S_{2(p-q)-1}$ è l'asse B_1 di un sistema regolare B di V_p della dimensione $p - q - 1$, e quindi abbiamo, intanto, che:

Se V_p *ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $q - 1$, *ammette pure un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $p - q - 1$.

14. Due sistemi regolari, come gli A e B del teorema precedente, per cui esiste un sistema nullo di V_p non singolare, tale che rispetto ad esso l'asse dell'un sistema sia lo spazio polare dell'asse dell'altro, si diranno *associati*; due sistemi regolari indipendenti, le cui dimensioni abbiano per somma $p - 2$, si diranno, col Severi, *complementari* ([19]).

15. Siano A e B due sistemi regolari associati di integrali riducibili di V_p; saranno essi anche complementari, cioè indipendenti?

La risposta è certo affermativa se, per es., nè A nè B contengono un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria, e A e B sono distinti; ma un caso assai più interessante, in cui la risposta è sempre affermativa, è dato dal seguente teorema:

Se esiste un sistema nullo principale di V_p, *rispetto a cui gli assi di* A *e* B *sono l'uno polare dell'altro,* A *e* B *sono non solo associati ma anche complementari.*

Supponiamo, come è lecito, che A sia il sistema determinato dai q integrali $u_1, u_2, \dots u_q$, e che la tabella (I) (Nota I) dei periodi primitivi abbia l'aspetto

$$(9)\qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} \;\dots\; \omega_{1,2q} & 0 \;\dots\dots\; 0 \\ \omega_{2,1} \;\dots\; \omega_{2,2q} & 0 \;\dots\dots\; 0 \\ \omega_{q,1} \;\dots\; \omega_{q,2q} & 0 \;\dots\dots\; 0 \\ \omega_{q+1,1} \;\dots\; \omega_{q+1,2q} & \omega_{q+1,2q+1} \;\dots\; \omega_{q+1,2p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \omega_{p,1} \;\dots\; \omega_{p,2q} & \omega_{p,2q+1} \;\dots\; \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\| ;$$

([19]) Severi, loc. cit. [2]), pag. 585.

ciò è sempre ottenibile con un conveniente mutamento del sistema primitivo dei cicli lineari sulla riemanniana di V_p, con che i sistemi nulli principali vanno in sistemi nulli principali.

Poi sia

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0 \tag{10}$$

l'equazione del considerato sistema nullo principale.

Poniamo

$$\omega_{j,k} = \alpha_{j,k} + i\beta_{j,k} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

con le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ reali e costruiamo il determinante Δ, d'ordine $2p$, le cui prime p righe sono date da quelle della matrice (9) quando al posto delle $\omega_{j,k}$ si supponga di sostituire le $\alpha_{j,k}$ e le successive p righe sono date da quelle della matrice ottenuta sempre da (9) scrivendo $\beta_{j,k}$ al posto di $\omega_{j,k}$.

Allora, se si indica con

$$P_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

lo pfaffiano del minore principale del determinante $|c_{r,s}|$ formato con le righe e le colonne $j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma}$, e con

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

il minore di Δ formato con le righe

$$1^a, 2^a, \dots l^{ma}, (p+1)^{ma}, \dots (p+l)^{ma}$$

e le colonne

$$j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma},$$

posto

$$\Delta_l = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} \sum_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} P_{j_1, j_2, \dots j_{2l}}\, \delta_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} \tag{11}$$

$$(j_1, j_2, \dots j_{2l} = 1 \dots 2p\ ;\ j_1 < j_2 < \dots < j_{2l}),$$

dire che (10) è un sistema nullo principale di V_p equivale ad affermare che le Δ_l son tutte diverse da zero, quelle di indice pari essendo tutte positive e quelle di indice dispari essendo tutte dello stesso segno.

È quanto risulta dalla dimostrazione contenuta nella nostra Nota sul teorema d'esistenza delle funzioni abeliane.

Poichè le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ per $j = 1 \dots q$ e $k = 2q+1, \dots 2p$ sono tutte nulle, Δ_q si riduce al prodotto di

$$(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \delta_{1,2,\dots 2q}$$

per lo pfaffiano del determinante emisimmetrico

$$C = \begin{vmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} & \ldots & c_{1,2q} \\ c_{2,1} & 0 & c_{2,3} & \ldots & c_{2,2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2q,1} & c_{2q,2} & c_{2q,3} & \ldots & 0 \end{vmatrix};$$

dunque sarà certo

$$C \neq 0 . \tag{12}$$

Ora l'asse A_1 del sistema regolare A è, nel caso in esame, l' S_{2q-1} di Σ secondo cui si tagliano gli iperpiani

$$x_{2q+1} = 0 \ldots x_{2p} = 0 :$$

quindi il sistema nullo subordinato dal sistema nullo (10) in questo S_{2q-1} ha per equazione, nell' S_{2q-1} medesimo,

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2q} c_{rs}\, y_r\, x_s = 0 , \tag{13}$$

cioè l'equazione che si ricava dalla (10) sopprimendovi tutti i termini che contengono coordinate con indice superiore a $2q$.

In virtù di (12), il sistema nullo (13) è certo non singolare, e quindi A_1 e B_1 sono, come volevasi, indipendenti.

Di qua, una volta che V_p ammette sempre un sistema nullo principale, almeno, risulta subito il classico teorema di Poincaré:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $q-1$, ammetterà anche un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $p-q-1$ indipendente dal primo.

Osservazione. — Gli integrali $u_1, u_2 \ldots u_q$, si possono riguardare come q integrali semplici di 1ª specie indipendenti di una varietà algebrica V_q di irregolarità superficiale q; ebbene per questa V_q l'asse A_1 di A ha lo stesso ufficio che Σ ha per V_p e le imagini α e $\bar{\alpha}$ di A hanno lo stesso ufficio che τ e $\bar{\tau}$ per V_p; quindi il sistema nullo (13), che appunto ha due spazî totali in α ed $\bar{\alpha}$, è un sistema nullo di V_q. Ma non basta. Siccome le $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$ involgono soltanto i periodi di $u_1, u_2, \ldots u_q$ e i soli coefficienti dell'equazione (13), le diseguaglianze che esprimono l'ipotesi fatta sul sistema nullo (10) implicano, senz'altro, che anche il sistema nullo (13) è in A_1 un sistema nullo principale di V_q; dunque:

Un sistema nullo principale di V_p induce nell'asse di un qualsiasi sistema regolare appartenente a V_p un sistema nullo che è sistema nullo *principale per la picardiana a cui competono gli integrali del considerato sistema regolare.*

16. Il sistema nullo singolare avente per asse l'asse B_1 del sistema indicato nel n. prec. con B e riflettente in A_1 il sistema nullo (13) è un sistema nullo razionale avente in τ e $\bar{\tau}$ due spazî totali; ora, dei due sistemi A e B, *uno* dei due, per es. B, è un qualsiasi sistema regolare di integrali riducibili di V_p; dunque:

L'asse di un sistema regolare di integrali riducibili di V_p *è pure asse di un sistema nullo singolare di* V_p.

Con ciò è invertito il primo teorema del n. 11.

17. Abbiamo visto che due sistemi regolari associati di V_p, almeno sotto qualche condizione, sono anche complementari ([20]); invece:

Due sistemi complementari sono sempre due sistemi associati.

E infatti, siano A e B i due sistemi complementari di V_p delle dimensioni rispettive $q-1$ e $p-q-1$; A_1 e B_1 i loro assi; α e $\bar{\alpha}$, β e $\bar{\beta}$ le loro imagini.

Sia π_1 un sistema nullo razionale di A_1 che abbia due spazî totali in α e $\bar{\alpha}$; un tal sistema nullo, per quanto risulta dal n. 15 esiste certamente. Poi si indichi con Π_B il sistema nullo (razionale) di Σ che ha per asse B_1 e induce in A_1 il sistema nullo π_1.

Evidentemente, Π_B avrà due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$.

Si costruisca, procedendo in modo analogo, un sistema nullo razionale di Σ, Π_A, che abbia per asse A_1 e due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$.

I sistemi nulli del fascio determinato da Π_A e Π_B sono tutti, all'infuori di Π_A e Π_B, non singolari; e rispetto a ciascuno di essi, A_1 ha per spazio polare B_1. D'altra parte, fra questi sistemi nulli ve ne sono infiniti che sono razionali; dunque A e B sono, come volevasi, associati.

18. Fin qui non ci siamo valsi che delle corrispondenze stabilite fra gli S_k ed S_{2p-k-2} di Σ dai sistemi nulli di V_p non singolari; ma anche quelli singolari dànno luogo, nello stesso modo, a qualche conseguenza, su cui, per altro, riteniamo inutile di fermarci adesso.

19. Nei teoremi dimostrati è implicitamente contenuto il legame richiesto fra la presenza di sistemi regolari riducibili nel sistema degli integrali (semplici di 1ª specie) di V_p e le relazioni di Riemann che intercedono fra i periodi di questi ultimi: basta, per accorgersene, enunciarli in linguaggio algebrico, anzi che geometrico.

Si ottiene così la seguente proposizione che involge e precisa il teorema di Poincaré:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica di irregolarità superficiale p contenga un sistema regolare di integrali sem-

([20]) Che due sistemi associati possano non essere complementari si mostra subito con esempi.

plici di 1ª specie riducibili, è che fra le sue relazioni di Riemann (relative a un fissato sistema primitivo di cicli lineari) ne esista qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$.

Ove esista una di queste relazioni di caratteristica $2q$ $(q < p)$, *ne esiste anche una di caratteristica* $2(p-q)$, *tale che il fascio di relazioni che esse determinano non contiene altre relazioni di caratteristica inferiore a* $2p$.

Si badi che a una relazione di Riemann di caratteristica $2q$ $(q < p)$ risponde sulla V_p un ben determinato sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili; quello cioè che ha per asse l'asse del sistema nullo singolare di V_p rispondente alla considerata relazione di Riemann. Ma poichè per $p > 2$ possono aversi sistemi nulli singolari di V_p diversi aventi lo stesso asse, uno stesso sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili di V_p può provenire da infinite relazioni di Riemann a caratteristica $2q$ (appartenenti a uno stesso sistema lineare).

Ciò non sussiste, come è chiaro, per il caso $p = 2$; e quindi, per $p = 2$, *la corrispondenza in discorso è perfettamente biunivoca.*

E. M.