ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 11 aprile 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota II del Socio Carlo Somigliana.

Le condizioni che abbiamo stabilite nella Nota precedente (¹) per la superficie σ di discontinuità, erano le seguenti:

$$(1)\qquad D[u]=u_\sigma \qquad D[v]=v_\sigma \qquad D[w]=w_\sigma$$

$$(2)\qquad D[X_\nu]=0 \qquad D[Y_\nu]=0 \qquad D[Z_\nu]=0\,.$$

Esse sono sufficienti, come abbiamo visto, a determinare le discontinuità, attraverso la superficie stessa, dei sei coefficienti di deformazione $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$. Ora si può inoltre vedere che da esse sono parimenti determinate le discontinuità di tutte le nove derivate prime delle tre funzioni u, v, w; e, se si tien conto delle equazioni d'equilibrio, cioè si suppone che in tutto il corpo le u, v, w soddisfacciano a queste equazioni, risultano parimenti determinate le discontinuità di tutte le derivate seconde di queste funzioni.

Questo risultato ha un notevole interesse. Ne deriva infatti la conseguenza che se due deformazioni regolari in tutto il corpo, eccetto che attraverso la σ, soddisfanno entrambe, su questa superficie, alle condizioni (1), (2), la deformazione rappresentata dalla loro differenza geometrica sarà completamente regolare in tutto il corpo. Infatti, per questa deformazione, dovranno

(¹) Questi Rendiconti, 1° sem. 1914, pag. 463.

essere nulle le discontinuità delle tre funzioni che rappresentano le componenti di spostamento e delle loro derivate prime e seconde. Nè altre singolarità potranno esistere.

Da ciò segue che se si trova una terna qualunque di funzioni U , V , W regolari, soddisfacenti alle equazioni d'equilibrio in tutto il corpo, eccetto che attraverso la superficie σ, sulla quale soddisfacciano alle (1), (2), il problema della determinazione della distorsione potrà essere ridotto a quello della deformazione del corpo sotto l'azione di date forze superficiali. Ponendo, infatti,

$$u = u' + \mathrm{U} \qquad v = v' + \mathrm{V} \qquad w = w' + \mathrm{W}\,,$$

le nuove funzioni u', v', w' da determinarsi non dovranno avere alcuna singolarità attraverso la superficie σ; e sulla rimanente superficie del corpo, dove la tensione totale deve essere nulla, dovranno soddisfare alla condizione di produrre tensioni uguali e contrarie a quelle prodotte dalla deformazione U , V , W .

Ora noi dimostreremo come sia sempre possibile di ottenere una terna di funzioni U , V , W . Il problema delle distorsioni sarà così ricondotto a quello delle deformazioni per date forze superficiali. Ciò costituisce un metodo per la risoluzione analitica del problema; ma un maggiore interesse può forse avere dal punto di vista dell'esistenza della soluzione nel problema delle distorsioni.

Difatti, dopo le ricerche di Lauricella, dei Cosserat e di Korn [1], l'esistenza della soluzione del problema della deformazione per date forze superficiali può considerarsi, almeno in via generale, come dimostrata. Il problema delle distorsioni potendosi ridurre a questo altro problema, dovrà quindi esso pure ammettere una soluzione. La quistione si potrà in tal modo considerare come risolta.

Veniamo ora alla dimostrazione della proprietà enunciata da principio.

Le formole che dànno le discontinuità dei coefficienti di deformazione, colla orientazione canonica degli assi, sono

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{D}[x_x] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \qquad \mathrm{D}[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \qquad \mathrm{D}[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}$$

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{D}[x_z] = \alpha \qquad \mathrm{D}[y_z] = \beta \qquad \mathrm{D}[z_z] = \gamma\,,$$

ove α, β, γ sono funzioni lineari note dei secondi membri delle prime tre equazioni. Nel caso dell'isotropia,

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

[1] Ved. particolarmente A. Korn, *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface.* Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, 2me sér., tom. X, année 1908.

Ora a queste equazioni, soddisfatte sulla σ, possiamo aggiungere le seguenti che si ottengono derivando le (1) tangenzialmente:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &D\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]=\frac{\partial w_\sigma}{\partial x} \qquad && D\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]=\frac{\partial w_\sigma}{\partial y} \\ &D\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial u_\sigma}{\partial y} && D\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\frac{\partial v_\sigma}{\partial x}\,. \end{aligned}\right.$$

Le prime due equazioni (3), la terza delle (4) e queste ultime determinano le discontinuità di sette delle derivate delle funzioni $u\,, v\,, w$; cioè di tutte, all'infuori di $\frac{\partial u}{\partial z}\,, \frac{\partial v}{\partial z}$. Ma dalle prime due equazioni (4), tenuto conto delle (5), si ricava

$$(6)\qquad D\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\alpha-\frac{\partial w_\sigma}{\partial x} \qquad D\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]=\beta-\frac{\partial w_\sigma}{\partial y}\,.$$

La quistione, per quanto riguarda le discontinuità delle derivate prime, è quindi risolta.

Per le derivate seconde si può subito osservare che se si suppongono note le discontinuità delle derivate prime, come lo sono infatti, di una delle funzioni, ad es. la u, le discontinuità delle cinque derivate, secondo che contengono una o nessuna derivazione rispetto a z, si possono subito ottenere con derivazioni tangenziali. Resta quindi, per la u, da cercarsi unicamente la discontinuità della $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Lo stesso può dirsi per le derivate delle altre due funzioni $v\,, w$. Tutto si riduce così alla ricerca delle discontinuità di $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$.

Ora, le tre equazioni dell'equilibrio sono lineari a coefficienti costanti nelle derivate seconde delle $u\,, v\,, w$. Da esse perciò, e dalla conoscenza delle discontinuità di tutte le rimanenti derivate seconde, potremo ricavare le discontinuità delle tre derivate seconde rispetto a z.

Nel caso dell'isotropia, le formole che determinano queste discontinuità sono le seguenti:

$$\mu D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]=-D\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x}+\frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial y^2}\right)$$

$$\mu D\left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]=-\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x}+\frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\mu D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]=-D\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right],$$

da cui

$$(\lambda+\mu)\,D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]=-\lambda\,D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\right]-\mu\,D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

e per le (6), tenendo conto che, nell'isotropia, $\alpha=0$ e $\beta=0$,

$$(\lambda+\mu)\,D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]=(\lambda-\mu)\left(\frac{\partial^2 w_\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_\sigma}{\partial y^2}\right).$$

II.

La deformazione U, V, W, di cui abbiamo parlato in principio del numero precedente e che è assoggettata alle sole condizioni (1), (2) sulla superficie σ ed a quella di essere regolare nella rimanente parte del corpo, non è univocamente determinata. Ma per lo scopo nostro basta trovare una qualunque delle infinite deformazioni che soddisfanno a quelle condizioni.

Immaginiamo il corpo elastico indefinitamente esteso, ed in esso la superficie di discontinuità σ. Possiamo cercare la deformazione prodotta in un tal corpo dalle discontinuità che si hanno in σ, aggiungendo la condizione che all'infinito la deformazione sia evanescente: cioè, dal punto di vista fisico, la deformazione prodotta dall'infiltrazione o dalla soppressione di un leggero strato di materia lungo la superficie σ.

È facile il vedere che una tale deformazione è univocamente determinata, ed è data immediatamente, nel caso della isotropia, al quale d'ora innanzi ci limiteremo, dalle formole generali di rappresentazione integrale delle componenti dello spostamento elastico. Se noi infatti supponiamo in quelle formole nulle le forze di massa e superficiali, scompaiono gli integrali relativi a queste forze, ed i rimanenti integrali (qualora sieno estesi alla superficie σ, e per le componenti di spostamento, che in essi compaiono, si prendono le $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$, componenti delle discontinuità) dànno appunto la deformazione che soddisfa alle condizioni richieste. Questi integrali corrispondono, nelle formole della statica elastica, alla funzione potenziale di doppio strato della formola di Green; e si può effettivamente dimostrare che essi soddisfanno, oltre che alle condizioni generali, anche alle condizioni (1), (2) con un procedimento che ho indicato in un'altra occasione [1]. Tale procedimento è assai semplice; però è fondato sopra un passaggio al limite, che potrebbe dar luogo a qualche obiezione, e non mette in evidenza le proprietà delle singole parti di cui si compongono gli integrali complessivi.

[1] *Sul problema statico di Maxvell.* Memorie della R. Accademia dei Lincei, vol. VII, 1908.

Riprenderò la dimostrazione di quei risultati con un procedimento diretto, indipendente da qualunque passaggio al limite.

Consideriamo gli integrali

$$A=\int_\sigma u_\sigma \frac{\partial r}{\partial \nu}\,d\sigma \qquad B=\int_\sigma v_\sigma \frac{\partial r}{\partial \nu}\,d\sigma\,, \qquad C=\int_\sigma w_\sigma \frac{\partial r}{\partial \nu}\,d\sigma\,,$$

ove r è la distanza di un punto generico $(x\,y\,z)$ dello spazio dal centro dell'elemento superficiale $d\sigma$. Questi integrali possono essere considerati come potenziali biarmonici di doppio strato, in quanto non differiscono dai corrispondenti potenziali newtoniani se non per la sostituzione della funzione r alla $\frac{1}{r}$. Sia ora

$$\Omega=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}$$

e poniamo

$$4\pi\,(u_1\,,v_1\,,w_1)=\alpha\,\frac{\partial \Omega}{\partial(x\,,y\,,z)}+\Delta_2(A\,,B\,,C)\,. \tag{7}$$

È assai facile di verificare che, per

$$\alpha=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,,$$

le espressioni precedenti soddisfanno alle equazioni d'equilibrio

$$(\lambda+\mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial(x\,,y\,,z)}+\mu\,\Delta_2(u\,,v\,,w)=0\,,$$

ove

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Esse sono regolari in tutto lo spazio, all'infuori che nella superficie σ, ed all'infinito si annullano come funzioni potenziali newtoniane di doppio strato.

Per studiare le discontinuità delle espressioni (7) e delle corrispondenti componenti di deformazione e di tensione sulla superficie σ, mi servirò di alcuni risultati che pubblicherò prossimamente negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Da essi risulta che le derivate seconde dei potenziali biarmonici di doppio strato sono continue se contengono una sola derivazione, o nessuna, nella direzione della normale allo strato agente. Supposta l'orientazione canonica degli assi, si ha poi, per le derivate seconde rispetto alla normale,

$$D\left[\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right]=8\pi u_\sigma \qquad D\left[\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right]=8\pi v_\sigma \qquad D\left[\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right]=8\pi w_\sigma\,.$$

Da ciò seguono subito le seguenti formole per le discontinuità delle $u_1\, v_1\, w_1$:

$$\text{(8)}\qquad D[u_1] = 2u_\sigma \qquad D[v_1] = 2v_\sigma \qquad D[w_1] = 2(\alpha+1)\, w_\sigma \,.$$

Per ottenere le discontinuità delle componenti di deformazione, conviene ricorrere alle formole che dànno le discontinuità delle derivate terze dei potenziali biarmonici di doppio strato. Mediante queste formole e supponendo gli assi delle x e y tangenti nel punto che si considera alle due linee di curvatura della superficie σ, e indicando con R_1 ed R_2 i rispettivi raggi di curvatura, si trova

$$D[x_x] = -2\alpha \frac{w_\sigma}{R_1} + 2\frac{\partial u_\sigma}{\partial x}$$

$$D[y_y] = -2\alpha \frac{w_\sigma}{R_2} + 2\frac{\partial v_\sigma}{\partial y}$$

$$\text{(8)}\qquad \left\{\begin{aligned} D[z_z] &= 2\alpha\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w_\sigma \\ D[y_z] &= -4\alpha \frac{v_\sigma}{R_2} + 2(2\alpha+1)\frac{\partial w_\sigma}{\partial y} \\ D[z_x] &= -4\alpha \frac{u_\sigma}{R_1} + 2(2\alpha+1)\frac{\partial w_\sigma}{\partial x} \\ D[x_y] &= 2\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}\right) \end{aligned}\right.$$

Da queste formole risulta

$$D[x_x + y_y + z_z] = D[\theta] = 2(\alpha+1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

Le discontinuità relative ai coefficienti di tensione si ottengono mediante le formole precedenti, assai facilmente, ricordando che

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu x_x \;,\quad Z_z = \mu y_z \;,\quad \text{ecc.}$$

Si trova, così,

$$D[X_x] = 2(\alpha+1)\,\lambda\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\mu\left(2\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} - 2\alpha\frac{w_\sigma}{R_1}\right)$$

$$D[Y_y] = 2(\alpha+1)\,\lambda\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\mu\left(2\frac{\partial v_\sigma}{\partial y} - 2\alpha\frac{w_\sigma}{R_2}\right)$$

$$D[Z_z] = [2(\alpha+1)\,\lambda + 4\mu\alpha]\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 4\mu\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w_\sigma \,.$$

Le tre rimanenti formole risultano senz'altro dalle ultime tre delle (8) moltiplicandole per μ.

La deformazione, che dobbiamo costruire per risolvere la quistione proposta, risulta dalla composizione della deformazione ora considerata (7), con un'altra che ora studieremo. Poniamo

$$\varphi = \int_\sigma \left(u_\sigma \frac{\partial a}{\partial \nu} + v_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} + w_\sigma \frac{\partial c}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

$$\psi_1 = \int_\sigma \left(v_\sigma \frac{\partial c}{\partial \nu} - w_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} \right) d\sigma \qquad \psi_2 = \int_\sigma \left(w_\sigma \frac{\partial a}{\partial \nu} - u_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

$$\psi_3 = \int_\sigma \left(u_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} - v_\sigma \frac{\partial a}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

essendo a, b, c le coordinate del centro dell'elemento superficiale $d\sigma$. Queste quattro funzioni sono potenziali newtoniani. Da ciò segue che risultano soddisfatte le equazioni dell'equilibrio, ponendo

$$7_a) \qquad 4\pi(u_2, v_2, w_2) = (2\alpha + 1) \text{ grad } \varphi + \text{rot } (\psi_1, \psi_2, \psi_3) .$$

Supposta, al solito, l'orientazione canonica degli assi, le discontinuità di queste espressioni si determinano subito mediante le formole delle discontinuità delle derivate prime delle funzioni potenziali di superficie.

Si ha, da queste formole,

$$\mathrm{D}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = 0 \qquad \mathrm{D}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0 \qquad \mathrm{D}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] = -4\pi w_\sigma$$

$$\mathrm{D}\left[\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] = -4\pi u_\sigma \qquad \mathrm{D}\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right] = -4\pi v_s$$

$$\mathrm{D}\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right] = 0 .$$

Mediante questo formole troviamo

$$\mathrm{D}[u_2] = -u_\sigma \qquad \mathrm{D}[v_2] = -v_\sigma \qquad \mathrm{D}[w_2] = -(2\alpha + 1)\, w_\sigma .$$

Confrontando queste formole colle (8), si trova subito che la deformazione, che si ottiene componendo le due deformazioni considerate, soddisfa in superficie alle condizioni seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{D}[u_1 + u_2] = u_\sigma \qquad \mathrm{D}[v_1 + v_2] = v_\sigma \qquad \mathrm{D}[w_1 + w_2] = w_\sigma ;$$

cioè precisamente alle condizioni (1), a cui doveva soddisfare la deformazione richiesta.

Il calcolo delle discontinuità delle componenti di deformazione richiede la conoscenza delle discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali di superficie. Queste discontinuità sono note (vedi: Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, chap. VI); e le formole che si ottengono nel caso nostro, sempre nell' ipotesi di un orientamento canonico degli assi, sono le seguenti per le componenti di deformazione relative a u_2, v_2, w_2:

$$D[x_x] = 2\alpha \frac{w_\sigma}{R_1} - \frac{\partial u_\sigma}{\partial x}$$

$$D[y_y] = 2\alpha \frac{w_\sigma}{R_2} - \frac{\partial w_\sigma}{\partial y}$$

$$D[z_z] = -2\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w_\sigma + \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right)$$

$$D[y_z] = 4\alpha \frac{v}{R_2} - 2(2\alpha + 1) \frac{\partial w_\sigma}{\partial y}$$

$$D[z_x] = 4\alpha \frac{u}{R_1} - 2(2\alpha + 1) \frac{\partial w_\sigma}{\partial x}$$

$$D[x_y] = -\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right),$$

da cui segue

$$D[\theta] = 0.$$

Da queste formole e dalle (8) possiamo dedurre le discontinuità delle componenti di deformazione relative alla deformazione che risulta dalla composizione $u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2$. Si trova, in questo caso,

$$D[x_x] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \qquad D[y_z] = 0$$

$$D[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \qquad D[z_x] = 0$$

$$D[z_z] = (2\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) \qquad D[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x},$$

e quindi

$$D[\theta] = 2(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

Da queste formole risulta subito, per le componenti di tensione relative ad un elemento superficiale appartenente alla superficie σ,

$$D[X_z] = 0 \qquad D[Z_z] = 0$$

(II)

$$D[Z_z] = [2\lambda(\alpha + 1) + 2\mu(2\alpha + 1)]\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) = 0,$$

ricordando il valore della costante α.

Resta così dimostrato che le componenti di tensione relative ad elementi superficiali di σ sono continue nell'attraversare questa superficie: o, in altri termini, che questi elementi non sono soggetti ad alcuna tensione risultante dalla deformazione del corpo. È questo appunto il significato delle condizioni (2), le quali così risultano soddisfatte per la deformazione $u_1 + u_2$, $v_1 + v_2$, $w_1 + w_2$.

Possiamo poi osservare che le deformazioni (7) (7_a) si annullano entrambe all'infinito, come si annullano le ordinarie funzioni potenziali, nè hanno altra singolarità all'infuori di quelle indicate per la superficie σ.

Dobbiamo quindi concludere che la deformazione rappresentata dalla composizione di queste due deformazioni, soddisfacendo alle condizioni (I) (II) sopra σ, rappresenta la deformazione di un mezzo elastico indefinito prodotta in esso dalla infiltrazione o dalla soppressione di un sottile strato di materia che è determinata dalle discontinuità u_σ, v_σ, w_σ.

Mediante questa deformazione, per quanto abbiamo visto da principio, qualunque problema di distorsione, relativo ad una superficie di discontinuità σ, può essere ricondotto ad un problema di deformazione per forze date in superficie, salvo quelle limitazioni relative al bordo del taglio, quando questo è interno al corpo, di cui abbiamo parlato nella Nota I.

Per quanto concerne le altre tre componenti di tensione della deformazione considerata, dalle formole precedenti deduciamo subito

$$D[X_x] = 2\lambda(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial u_\sigma}{\partial x}$$

$$D[Z_y] = 2\lambda(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}$$

$$D[X_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}.$$

Esse sono quindi in generale discontinue; ma risultano continue quando le componenti delle discontinuità soddisfacciano alle condizioni

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} = 0.$$

E questa conclusione è perfettamente conforme alla proprietà generale che abbiamo dimostrato in principio della Nota precedente, quando abbiamo stabilite le condizioni perchè una distorsione soddisfacesse alla definizione di Weingarten, cioè avesse continue, lungo la superficie di discontinuità, tutte le sei componenti di tensione.

Ci sembra pertanto che, mediante le considerazioni che precedono, i principî della teoria delle distorsioni elastiche vengano ad assumere un assetto generale e definitivo; e che le ricerche del Volterra, il quale ha così felicemente creata questa teoria, ne risultino meglio collegate sotto ogni rapporto colla teoria generale dell'elasticità.

III.

Ci resta però ancora da rispondere ad un'obiezione che può essere sollevata circa alcune deduzioni delle quali abbiamo fatto uso.

Data una relazione della forma

$$f_\nu - f_{\nu'} = g$$

che definisca le discontinuità di una funzione f lungo una superficie σ, noi abbiamo fatto uso delle relazioni che si deducono da questa, derivando tangenzialmente alla superficie stessa. Ora, ammessa la regolarità delle funzioni $f_\nu, f_{\nu'}, g$, non vi è alcun dubbio che, insieme alla relazione precedente, debbano sussistere tutte quelle che se ne deducono con derivazioni tangenziali, finchè queste sono possibili. Ma non si può parimenti essere sicuri che queste relazioni rappresentino le discontinuità delle corrispondenti derivate della funzione f; poichè puó darsi che le derivate calcolate sulla superficie σ non coincidano col limite delle derivate, calcolate fuori di σ, quando ci avviciniamo indefinitamente a questa superficie. Tuttavia in molti casi questa coincidenza effettivamente si verifica [1].

Non sarebbe facile discutere direttamente nel nostro caso intorno alla validità dei procedimenti seguiti. Però possiamo far vedere che i risultati, a cui siamo arrivati, possono essere stabiliti anche all'infuori di quei procedimenti di derivazione. Non considereremo il problema elastico, ma ci limiteremo al corrispondente problema della teoria del potenziale che abbiamo considerato alla fine della Nota I. Le difficoltà, ed il modo di superarle, sono sostanzialmente identiche nei due casi; formalmente la quistione si presenta assai più semplice nel caso del potenziale.

Il problema considerato era quello di determinare una funzione armonica regolare V in uno spazio S limitato da una superficie s e da un taglio interno σ, colla condizione che fosse

$$1^\circ \text{ sulla superficie } s: \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0;$$

[1] Ad esempio le equazioni che si deducono dalla relazione che determina le discontinuità di un potenziale di doppio strato

$$W_\nu - W_{\nu'} = 4\pi g \quad , \quad W = \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma \, ,$$

derivando tangenzialmente

$$\frac{\partial W_\nu}{\partial x} - \frac{\partial W_{\nu'}}{\partial x} = 4\pi \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_\nu}{\partial y} - \frac{\partial W_{\nu'}}{\partial y} = 4\pi \frac{\partial g}{\partial y} \, ,$$

danno effettivamente le discontinuità delle derivate tangenziali $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ del potenziale di doppio strato (Cfr. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*).

2° sulla superficie σ: $V_\nu - V_{\nu'} = g$, $\dfrac{\partial V}{\partial \nu} + \dfrac{\partial V}{\partial \nu'} = 0$,

ove g era una funzione data dei punti di σ.

Per la validità della relazione

$$\int_S \Delta_1 V dS = -\int (V_\nu - V_{\nu'}) \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = -\int g \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma$$

da cui deriva l'unicità della soluzione del problema proposto, basta che le derivate seconde di V in S esistano e siano integrabili.

Per determinare la V conviene porre

$$V = U + W \quad \text{ove} \quad W = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma$$

supponendo che g soddisfaccia a quelle condizioni, indicate nella Nota I, affinchè non si presentino, per le derivate di W, degli infiniti sul contorno di σ.

Le condizioni a cui deve soddisfare la U, a cagione delle relazioni verificate sopra σ dalla W:

$$W_\nu - W_{\nu'} = g \qquad \frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \nu'} = 0\,,$$

sono allora

$$U_\nu - U_{\nu'} = 0 \qquad \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial U_{\nu'}}{\partial \nu'} = 0$$

mentre la condizione sopra s

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0\,,$$

ci dà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial n}$$

Inoltre la U dovrà essere armonica. Da queste condizioni è facile dedurre che la U dovrà essere regolare insieme alle sue derivate, quando si attraversa la superficie σ.

Considerando infatti lo spazio S come limitato, oltre che dalla superficie s, dalle due faccie del taglio σ, e rappresentando U colla formola di Green, troviamo

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_s \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma (U_\nu - U_{\nu'}) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial U}{\partial \nu'} \right) \frac{d\sigma}{r}$$

ossia per le condizioni a cui soddisfa U sopra σ

$$U = \frac{1}{4\pi}\int_s \left(U\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds\,.$$

Ora questo integrale non ha alcun rapporto con la superficie σ e quindi la U non avrà alcuna singolarità sopra questa superficie.

Possiamo quindi concludere che la U non ha nello spazio S alcuna singolarità, e perciò la determinazione di essa è ridotta a quella di una funzione armonica regolare, di cui sono dati i valori della derivata normale sulla superficie, che limita il campo.

Questa funzione, come è ben noto, esiste in generale, e quindi, si può concludere, esiste anche la V. Inoltre, poichè la funzione V è univocamente determinata dalle condizioni poste, ne viene di conseguenza che sopra la superficie σ risultano pure completamente determinate le discontinuità di tutte le sue derivate di qualsiasi ordine.

L'esistenza nella statica elastica di formole analoghe a quella di Green permette di trasportare immediatamente le considerazioni precedenti nei problemi della teoria delle distorsioni, che abbiamo precedentemente studiato.

Meccanica. — *Una proprietà di simmetria delle traiettorie dinamiche spiccate da due punti.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Il sig. R. Straubel rilevò, pochi anni or sono, una notevole relazione di reciprocità, concernente i pennelli elementari di raggi emessi da due centri luminosi di un mezzo qualsiasi [1] (comunque eterogeneo, ma isotropo). Questa relazione dà luogo a interessanti applicazioni fotometriche e diottriche, indicate dallo stesso Straubel, e ricorre nei fondamenti della teoria dell'irraggiamento, secondo il metodo integrale di Hilbert [2].

Mi propongo di far vedere, sfruttando in generale le caratteristiche dell'azione hamiltoniana [3], che il risultato in questione rientra come caso

(1) *Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen*, Phys. Zeitschrift, IV, 1903, pp. 114-117. Il sig. A. Gleichen ne ha dato poco dopo [ibidem, 226-227] una dimostrazione di carattere elementare, considerando un numero finito di mezzi omogenei, e valutando l'influenza delle successive rifrazioni.

(2) *Begründung der elementaren Strahlungstheorie*, Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1912, pp. 1-17; riprodotto in Phys. Zeitschrift, XIII, 1912, pp. 1056-1064; e in Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, XXII, 1913, pp. 1-20.

(3) Nella forma che meglio si presta alle applicazioni ottiche, quale emerge ad es. dal *Treatise on natural philosophy* di Kelvin e Tait, part I [Cambridge, University Press, 1896], pp. 347-358. A pag. 358, sotto il titolo *Application to common optics*, si trova accennato con espressivo commento un caso particolare del teorema di Straubel.