ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

lavoro nella compressione adiabatica, l'A. arriva a porre $pdv = -vdp$; ora questa condizione equivale a supporre che la trasformazione sia isotermica e non adiabatica. Se, ciononostante, l'A. giunge infine a scrivere esattamente l'ultima formola che dà l'equivalente meccanico, ciò dipende dall'aver egli supposto che nell'esperienza di Clément e Desormes il rapporto k sia dato esattamente dal rapporto fra le differenze di pressione osservate, mentre quella non è che una espressione approssimata; l'espressione esatta è quella in funzione dei logaritmi delle pressioni, che l'A. stesso ha ricordato in principio della sua Nota. Del resto è evidente che qualunque esperimento, atto a determinare il rapporto k, serve pure a calcolare direttamente l'equivalente meccanico, quando si conosca uno dei due calori specifici.

Cristallografia. — *Sulla sistematica dei cristalli.* Nota del Socio C. Viola.

Benchè si riconoscesse la convenienza di classificare i cristalli secondo le 32 simmetrie, ciò nondimeno l'antico aggruppamento in 6 o 7 sistemi ha sempre avuto la precedenza per ragioni didattiche, pratiche e scientifiche; io anzi ho fiducia che ciò si manterrà ancora, ciascun sistema riassumendo una serie di proprietà fisiche e una caratteristica delle figure cristalline, che lo rendono individuato completamente e distinto da altri.

Ma se l'antica sistematica si è affermata non ostante qualche moderna innovazione, non si può del pari asserire che le definizioni dei singoli sistemi siano state sempre conseguenti e uniformi.

Chr. S. Weiss (1) e la sua scuola stabilirono le basi dei sistemi nella disposizione degli assi della piramide fondamentale; R. I. Hauy (2), Broocke, A. Lévy (3) e altri nella disposizione degli spigoli del parallelepido fondamentale. Taluni, come M. Bauer (4), C. F. Naumann (5), Zirkel ecc., definirono i sistemi cristallini valendosi delle simmetrie delle forme oloedriche. Altri, come P. Groth (6), Schoenfliess (7), ecc., aggruppano le simmetrie in sistemi, quest'ultimo più conseguente, ma meno felice, creando p. es. il sistema digonale con assi 2-ri esclusivamente e il sistema monogonale senza assi; il primo uniformando il carattere di un sistema con quello della rispet-

(1) Chr. S. Weiss, *Uebersichtliche Darst. d. versch. natür. Abth. der Krystallisations systeme.* Abh. Berl. Akad., 1815, pag. 289.

(2) R. I. Hany, *Traité de cristall.*, Paris, 1882.

(3) A. Lévy, *Descript. d'une collect. d. minéraux formé par M. Henland*, Londres 1837.

(4) M. Baner, *Lehrbuch der Mineralogie.*

(5) C. F. Naumann, *Elem. d. Mineralogie*, I ed. 1846.

(6) P. Groth., *Physikalische Krystallographie*, 1905.

(7) A. Schoenfliess, *Kristallstructur*, 1891.

tiva forma oloedrica, aggiungendo l'equivalenza degli assi, che non è rigorosa conseguenza delle premesse. Bravais (1851), Mallard (1879), Wallerant (1909) e in generale la scuola francese fondarono la sistematica sugli edificî molecolari, introducendo così nell'insegnamento una ipotesi che dal punto di vista didattico si dovrebbe sopprimere.

Goldschmidt [1] credette di riformare e unificare la sistematica, definendo il sistema cristallino come quell'insieme di cristalli che hanno la stessa simmetria degli elementi, ovvero lo stesso numero di elementi variabili. Più conseguente, credo, procede in questa questione lo Tschermak. Per lui i cristalli monoclini hanno una zona mediana, rispetto alla quale le altre zone o sono normali o a due egualmente inclinate; i cristalli trimetrici hanno tre zone fra loro normali, e così via.

Una sistematica razionale può fondarsi sul principio delle simmetrie, e può essere rigorosamente condotta, come ha fatto vedere il prof. Panebianco [2]. Ma è anche facile che l'analogia dei numeri tragga in inganno, come è accaduto nella sistematica di Schoenfliess. Nè si può dire che Groth, nel definire il sistema esagonale, sia stato felice, giudicando dai risultati ottenuti.

Q. Sella [3] non discute nè i limiti, nè le definizioni dei sistemi cristallini; seguendo gli autori classici, stabilisce come tipo in ogni sistema la simmetria oloedrica, e come carattere gli assi di riferimento e i rispettivi parametri della faccia unitaria.

Se io qui spezzo una lancia in favore di una sistematica indipendente dalle simmetrie che possono o no verificarsi, intendo solo rilevare e ribadire il principio, forse meglio di quanto si è fatto fin'ora, pel quale le simmetrie fisiche possono non esserci, non ostante le condizioni geometriche. Alcuni esempî chiariranno il pensiero.

Dalle esperienze di Beckenkamp risulta che l'aragonite è o asimmetrica o dotata del centro di inversione: eppure essa è trimetrica, argomentando dalle sue figure. Le figure di corrosione nel gesso dimostrano che questo minerale ha le proprietà fisiche dei cristalli triclini; eppure, dato il suo sviluppo, non può figurare se non nel sistema monoclino. Anche l'ortoclasio, come il microclino, ha la simmetria del sistema triclino, eppure è monoclino. Dai quali esempî si rileva che nè le simmetrie nè l'equivalenza degli assi, come fece il Liebisch [4], dovrebbero essere guida nella definizione dei sistemi.

Mi pare, quindi, che riprendere in esame i sistemi cristallini, rilevarne i caratteri, prescindendo da qualsiasi principio di simmetria o di equivalenza, non sia un lavoro fuor di luogo, specialmente poi se le definizioni, a cui si

[1] V. Goldschmidt, *Ueber Krystallsysteme, deren Definition und Erkennung.* Zeitschr. f. Krystall. 1899, vol. 31, pag. 135.

[2] R. Panebianco, *Trattato di cristallografia morfologica,* Padova 1904.

[3] Q. Sella, *Primi elementi di cristallografia,* Torino 1877.

[4] Th. Liebisch, *Geometrische Krystallographie.* Leipzig, 1881.

arriva per questa via, non scompongono l'attuale sistematica, che si è affermata e conservata nelle opere dei più insigni cristallografi.

Il còmpito nostro è di far spiccare il carattere geometrico nella figura di un cristallo necessario perchè un elemento di simmetria, asse di simmetria, asse speculare, piano di simmetria, sia possibile. Per ragioni di chiarezza e semplicità potremo trattare questo problema dimostrando alcuni teoremi.

1° Teorema. *Un piano di simmetria è faccia ed è normale a zona.*

Questo teorema si dimostra graficamente con un tratto di penna. Sia E ed E′, rispettivamente, il piano di simmetria [1] (fig. 1); P_1 e P_1' due facce

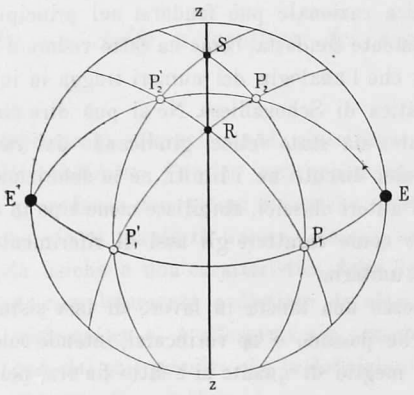

Fig. 1.

simmetriche per rispetto al detto piano, e così pure P_2 e P_2'. Le due zone $P_1 P_1'$ e $P_2 P_2'$ si incontrano in E ed E′, epperò il piano di simmetria è faccia. Di più, le due zone $P_1 P_2'$ e $P_1' P_2$ si incontrano in R, come le zone $P_1' P_2'$ e $P_1 P_2$ si incontrano in S, quindi il cerchio comune ad R, ed S è zona.

2° Teorema. *Un asse di simmetria è zona ed è normale a faccia.*

Anche per questo teorema una dimostrazione grafica è da preferirsi. Sia l'asse di simmetria normale al piano del disegno e rappresentato dal cerchio fondamentale *AA* della proiezione stereografica. Se l'asse è binario, si assumono due coppie di facce simmetriche come $P_1 P_1'$ e $P_2 P_2'$ (fig. 2). Le due zone $P_1 P_1'$ e $P_2 P_2'$ si incontrano nel centro O, che quindi è faccia, normale all'asse di simmetria. D'altra parte, le due zone $P_1 P_2'$ e $P_1 P_2$ si incontrano nei poli R e R′, come le due zone $P_2 P_1'$ e $P_1 P_2'$ si incontrano nei

[1] Per ragioni di brevità, scambieremo i poli con faccie o piani, e i cerchi zonali con zone, o spigoli o assi.

poli S e S′: onde il cerchio AA, comune ad R ed S, è cerchio zonale, e l'asse di simmetria è zona.

Nella stessa guisa si procede se l'asse di simmetria è 4-rio o 6-rio.

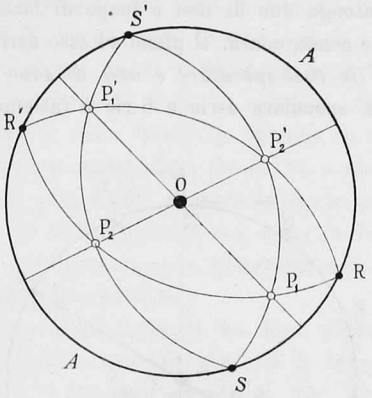

Fig. 2.

Sia l'asse di simmetria di nuovo rappresentato dal cerchio fondamentale AA, e siano $P_1\,P_2\,P_3$ ..... (fig. 3), le facce simmetriche per rispetto al detto asse.

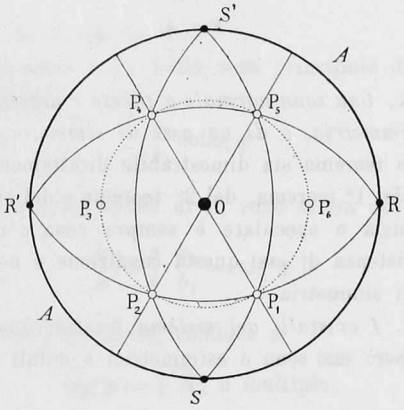

Fig. 3.

Le zone $P_1\,P_4$ e $P_2\,P_5$ si incontrano in O, che è perciò polo di faccia normale all'asse. Le due zone $P_1\,P_2$ e $P_4\,P_5$ si incontrano nei poli R ed R′ come le due zone $P_1\,P_5$ e $P_2\,P_4$ si incontrano in S ed S′. Onde il cerchio AA, comune ad S e R, è zona.

Se l'asse è 3-rio la dimostrazione geometrica non è possibile; conviene in tal caso richiamare in aiuto la omogeneità fisica [1]. Se la materia è omogenea in tutta la sua estensione, vi esisteranno non uno, ma innumeri assi di simmetria 3-ri paralleli ed uniformemente distribuiti nello spazio; ed un piano che contenga due di essi è luogo di facce, onde l'asse 3-rio è asse di zona, e, come conseguenza, il piano ad esso normale è faccia.

Corollario. *Un asse speculare è asse di zona e normale a faccia.*

Infatti un asse speculare 4-rio e 6-rio è insieme asse di simmetria 2-rio e 3-rio.

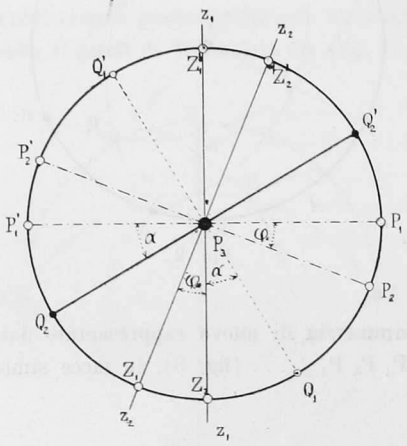

Fig. 4.

3° Teorema. *Una zona normale a faccia è necessaria per l'esistenza di un piano di simmetria, o di un asse di simmetria o speculare.*

Benchè questo teorema sia dimostrabile direttamente, è anche l'immediata conseguenza del 1° teorema, del 2° teorema e del suo corollario, poichè, se l'asse di simmetria o speculare è sempre zona e normale a faccia, ne deriva che per l'esistenza di essi questa condizione è necessaria; altrettanto dicasi del piano di simmetria.

Corollario. *I cristalli del sistema triclino sono privi di zone normali a facce*; epperò essi sono o asimmetrici o dotati del centro di inversione.

4° Teorema. *Due zone normali a facce, e inclinate fra loro, traggono con sè la presenza di una zona ortogonale ad esse, e tante zone normali a facce, quante possono esserci nel loro piano comune.*

Le due zone z_1 e z_2 normali a facce P_1 e P_2 (fig. 4), facciano fra loro l'angolo φ diverso da 90°.

[1] C. Viola, *Beweis der Rationalität einer Symmetrieaxe.* Zeitschr. f. Krystall. *27*, pag. 399.

Il cerchio $P_2 P_1 P_1' P_2'$ è cerchio zonale; e il polo P_3, incontro delle zone $z_1 z_2$, è polo di faccia. Con ciò si vede che la zona $P_1 P_2' \ldots$, normale a faccia è ortogonale alle zone date.

Si possono assumere come assi di riferimento le due zone z_1 e $P_1 P_3$, e come faccia unitaria P_2 nella comune zona di Z_2 e P_1. Se Q_1 e Q_1' sono i poli di qualsiasi faccia nella stessa zona facente con Z_1 l'angolo α, saranno anche Q_2 e Q_2' i poli di una faccia nella stessa zona facente con P_1' l'angolo α, poichè nel quadrante $P_1' P_3 Z_2$ le relazioni fra i parametri della faccia unitaria Z_1 e quelli della faccia Q_2 saranno le stesse come nel quadrante $Z_2 P_1 P_3$, fra i parametri della faccia P_2 e quelli della faccia Q_1; e poichè l'angolo fra Q_1 e Q_2 è 90°, si conclude che la qualsivoglia faccia Q_1 ha per zona normale la $P_3 Q_2$, come a sua volta la faccia Q_2 ha per zona normale la $P_3 Q_1$; e così tutte le zone contenute nella faccia P_3 sono zone normali a facce, ed esse sole sono tali.

Due zone normali a facce inclinate fra loro, possono dar luogo a tre casi distinti ed importanti, secondo che, fra le innumeri zone contenute nel loro piano comune, ci siano gli angoli di 45°, di 60° ovvero nessuno dei due.

Infatti indichiamo con a, b i parametri fondamentali determinati dalla faccia unitaria P_2 sugli assi di riferimento $\overline{P_1 P_3}$ e z_1. Il loro rapporto è

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tag} \varphi$$

essendo φ l angolo che P_2 fa con P_1.

La faccia Z_1 normale a P_2 nella zona principule deve avere per rapporto dei suoi parametri

$$\frac{a_1}{b_1} \operatorname{cotag} \varphi$$

salvo il segno; i due primi indici di Z_1 sono allora nel rapporto

$$\frac{h}{k} = \frac{a}{b} : \frac{a_1}{b_1} = \operatorname{tag}^2 \varphi ,$$

il quale, dovendo essere razionale, conduce a

$$\operatorname{tag} \varphi = \sqrt{N}, \text{ o multiplo,}$$

essendo N razionale.

Ed ecco ora i casi possibili e distinti:

Per $N = 1$, sarà $\varphi = 45°$

» $N = 3$ » $\varphi = 60°$ e

» $N = 2, 5, 6$, ecc. sarà φ diverso di 45° e 60°, ma prossimamente a questi.

I due primi casi possono essere trattati a parte; il terzo è oggetto di un problema speciale, che può entrare nel 5° teorema e nel 6°.

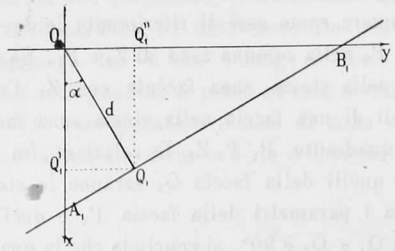

Fig. 5.

Nel caso in cui si tratti di angoli di 45°, possiamo assumere quali assi di riferimento due zone normali, x, y (fig. 5), e come faccia unitaria quella che con x ed y fa 45°, i cui parametri stanno come 1:1.

Sia A_1B_1, con la polare OQ_1, fig. 5, una qualsivoglia faccia i cui parametri sono $a_1 = OA_1$, $b_1 = OB_1$ e ∞. I suoi due primi indici sono nel rapporto

$$h:k = \frac{a}{a_1} : \frac{a}{b_1} = \cos\alpha : \operatorname{sen}\alpha .$$

D'altra parte, essendo $a_1' = OQ_1' = d\cos\alpha$, e $b_1' = OQ_1'' = d\operatorname{sen}\alpha$, gli indici m ed n della zona OQ_1 normale alla faccia data, saranno nel rapporto

$$m:n = \frac{a_1'}{a} : \frac{b_1'}{a} = \cos\alpha : \operatorname{sen}\alpha .$$

Vale a dire, essendo (hko) il simbolo di una faccia contenuta nella zona principale, sarà $[hko]$ il simbolo della zona ad essa normale.

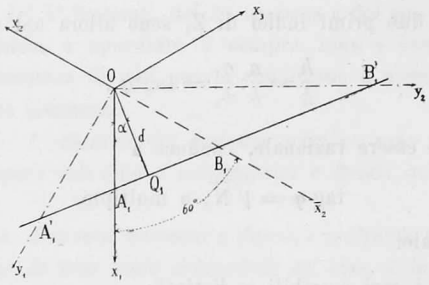

Fig. 6.

Nel secondo caso, in cui si tratta di angoli di 60°, si assumono quali assi di riferimento tre spigoli (zone) x_1, x_2, x_3 facenti fra loro 120° (180-60) (fig. 6).

Una qualsiasi faccia $A_1 B_1$ dal simbolo $(hkio)$ contenuta nella zona principale, la cui normale OQ_1 fa con x_1 l'angolo α, determina su x_1 e x_2 i parametri

$$a_1 = OA_1 = \frac{d}{\cos\alpha}, \quad b_1 = OB_1 = \frac{-d}{\cos(60-\alpha)}.$$

Ci sarà il rapporto fra i due primi indici

$$h:k = \cos\alpha : -\cos(60-\alpha).$$

Gli indici della zona OQ_1, normale alla faccia data, si calcolano [1] col sussidio del piano normale alla zona e degli assi polari y_1 ed y_2 normali rispettivamente a x_2 e x_1. Essendo i rispettivi parametri

$$OA_1' = a_1' = \frac{d}{\operatorname{sen}(60-\alpha)} \quad \text{e} \quad OB_1' = b_1' = \frac{d}{\operatorname{sen}\alpha},$$

si avrà il rapporto

$$m:n = \frac{a}{a_1'} : \frac{a}{b_1'} = \operatorname{sen}(60-\alpha) : \operatorname{sen}\alpha.$$

Questi due rapporti si riducono alle espressioni seguenti:

$$\frac{2k+h}{h} = -\sqrt{3}\operatorname{tag}\alpha, \quad \frac{2m+n}{n} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tag}\alpha},$$

le quali, moltiplicate fra loro, dànno, dopo riduzioni, la equazione

$$2mk + nk + mh + 2nh = 0,$$

e quindi

$$\frac{m}{n} = -\frac{2h+k}{2k+h}, \quad \frac{h}{k} = -\frac{2m+n}{2n+m}.$$

Dunque una qualsiasi faccia della zona principale data dal simbolo $(hkio)$, ha per zona normale, il cui simbolo è $[mnqo]$, essendo naturalmente $h+k+i=o$ e

$$m+n+q=0 \quad ; \quad \frac{n}{q} = -\frac{2k+h}{k-h} \quad ; \quad \frac{q}{m} = \frac{k-h}{2h+k}.$$

[1] C. Viola, *Relazione fra gli indici di facce e zone nel simboleggiamento a tre o quattro indici.* Rivista di miner. e cristall. del prof. Panebianco, 1909, *36*, 70; Id. *Ueber das in den Symbolen mit vier Indices enthaltene Zonengesetz*, Zeitschr. f. Krystall., 1909, *46*, 345.

Si comprende che le condizioni date dal 4° teorema soddisfano ai sistemi dimetrico ed esagonale: al primo, se fra gli angoli di due facce nella zona principale ci siano 45°; al secondo, se ci siano 60°.

Il terzo caso, quando cioè φ è diverso di 45° e 60°, entra nel 5° teorema per casi speciali come è facile rendersi conto.

5° Teorema. *Due zone normali a facce fra loro ortogonali traggono con sè l'esistenza di una terza zona normale a faccia, ed una sola.*

Questo teorema non è che la conseguenza immediata del 4° teorema, poichè, se ivi l'angolo φ fra le due zone normali a facce è di 90°, per ogni e qualsiasi faccia contenuta nella zona principale non si ottiene la zona normale. Le tre zone z_1 z_2 e z_3 sono ortogonali, e si assumono quali assi di riferimento. Tuttavia vi possono essere dei casi speciali, come è apparso nel 4° teorema, nei quali tutte le zone di una zona principale possono avere faccie normali, ma in tali casi sono esclusi gli angoli di 45° o 60°.

1° Corollario. *Data l'esistenza di una sola zona normale a faccia, la zona non può essere che asse di simmetria 2-ri, nè mai asse speculare.*

Se infatti quest'asse fosse 3-*rio*, 4-*rio*, 6-*rio*, ogni faccia in esso contenuta sarebbe normale a zona, contrariamente alla premessa. Altrettanto dicasi di un asse speculare 4-*rio* o 6-*rio*.

I cristalli aventi una sola zona normale a faccia sono monoclini.

2° Corollario. *Data l'esistenza di tre sole zone normali a facce, esse non possono essere che assi di simmetria 2-ri, nè mai assi speculari.*

Le tre zone devono essere ortogonali, come risulta dal 5° teorema. Se esse fossero assi di simmetria 3-*ri*, 4-*ri* o 6-*ri*, o assi speculari 4-*rio* o 6-*rio*, ciascuna faccia contenuta in una di esse, ove ciò ha luogo, sarebbe normale a faccia, contrariamente alla premessa.

I cristalli dotati di tre sole zone normali a facce, appartengono al trimetrico.

6° Teorema. *Tre zone normali a facce inclinate fra loro sono condizione necessaria e sufficiente perchè ogni faccia sia normale a zona.*

Siano z_1, z_2, z_3, le tre zone, fig. 7, non giacenti in un piano, con le facce rispettivamente normali P_1, P_2, P_3. Per semplicità si sono assunte due di esse zone, z_1 e z_2, perpendicolari fra loro, senza che perciò scemi la generalità del problema, purchè la zona z_3 non giaccia nè nel piano z_1 z_2 nè nelle facce P_1 o P_2.

Si osservi che la zona P_3 O determina con la zona P_1 P_2 la faccia N, N′, ed essendo P_3 ed O facce normali a zone ed inclinate fra loro, ne segue che N è faccia normale a zona in virtù del 4° teorema.

Sia ora Q_1 una qualsivoglia faccia, di cui si vuol dimostrare che è normale a zona. Si conducono le due zone Q_1 P_3 e Q_1 P_3', le quali determinano

sulla zona $P_1 P_2$ le due facce $S_1 S_1'$ e $S_2 S_2'$, che sono normali a zone; onde anche le zone $Q_1 P_3$ e $Q_1 P_3'$ sono normali a facce, e precisamente alle facce R_1 e, rispettivamente, R_2; epperò si conclude che la zona q_1, ad esse comune, è normale a Q_1.

Se con a_1, b_1, c_1 si chiamino i parametri di una faccia sopra tre spigoli di riferimento ortogonali, si sa che gli indici di essa faccia, h, k, l, sono inversamente proporzionali ai detti parametri; altrettanto gli indici della zona normale a detta faccia sono inversamente proporzionali agli stessi parametri; d'onde segue che, se $(h\,k\,l)$ è il simbolo di una faccia nel monometrico, dovrà essere $[h\,k\,l]$ il simbolo della zona ad essa normale, qualunque sia d'altronde la faccia unitaria.

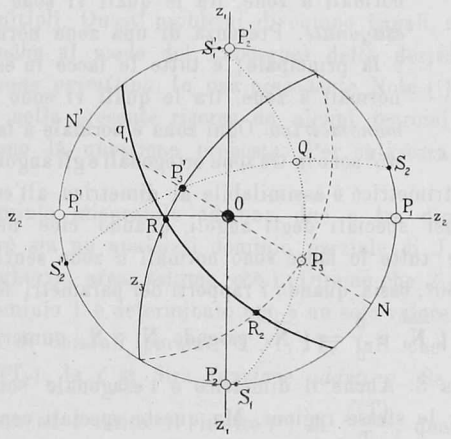

Fig. 7.

Se si considerano tutte le zone normali a facce determinate in questo teorema e che rispecchiano il carattere del sistema monometrico, tre specie di zone si mettono in evidenza come è rilevato nella dimostrazione del 4° teorema, vale a dire zone nelle quali vi sono angoli di 45°, zone nelle quali vi sono angoli di 60° e zone nelle quali non vi sono angoli nè di 45° nè di 60°. Le prime sono in numero di tre, le seconde in numero di quattro, le terze sono le rimanenti. Ed è facile distinguere queste tre specie di zone e di determinarle da un qualsiasi complesso di quattro facce date.

Mi pare che nei sei teoremi qui esposti siano risultate le relazioni che possono esserci fra le simmetrie e i sistemi cristallini; mi pare, anzi, che spicchi chiaramente la condizione geometrica necessaria perchè in un cristallo possa verificarsi un qualsiasi grado di simmetria. Solamente la asimmetria e il centro di simmetria non sono subordinate a veruna condizione. La condizione geometrica necessaria perchè assi di simmetria o speculari, o piani di simmetria, dal punto di vista delle proprietà fisiche, siano possibili, è

dunque l'esistenza di zone normali a facce, ed è quindi naturale che i sistemi cristallini debbano essere fondati sulla presenza di zone normali a facce, dalla quale condizione si deducono le altre condizioni geometriche che usualmente hanno servito per la definizione dei sistemi.

Possiamo ora riassumere i caratteri dei sei sistemi cristallini nel modo seguente:

1°) *sistema triclino*. Mancanza di zone normali a facce;
2°) » *monoclino*. Presenza di una sola zona normale a faccia;
3°) » *trimetrico*. Presenza di tre zone normali a facce;
4°) » *dimetrico*. Presenza di una zona normale a faccia, che è la principale; e tutte le facce in essa contenute sono normali a zone, fra le quali vi sono angoli di 45°;
5°) » *esagonale*. Presenza di una zona normale a facce, che è la principale; e tutte le facce in essa contenute sono normali a zone, fra le quali vi sono angoli di 60°;
6°) » *monometrico*. Ogni zona è normale a faccia. Gli angoli di 45° sono in tre zone ortogonali e gli angoli di 60° in quattro.

Il sistema trimetrico è assimilabile al dimetrico, all'esagonale e al monometrico per casi speciali degli angoli, quando cioè nelle tre zone o in una sola di esse tutte le facce sono normali a zone senza la presenza di angoli di 45° o 60°, ossia quando i rapporti dei parametri fondamentali siano espressi da $\frac{a}{b} = \sqrt{N_1}$ e $\frac{b}{c} = \sqrt{N_2}$ essendo N_1 e N_2 numeri razionali diversi da quadrati e da 3. Anche il dimetrico e l'esagonale sono assimilabili al monometrico per le stesse ragioni. Ma queste speciali condizioni che forniscono i caratteri per i pseudodimetrici, pseudoesagonali, e pseudomonometrici non turbano i caratteri fondamentali dei sei sistemi.

Sostituendo le zone normali a facce al criterio degli angoli fra gli assi con il rapporto dei parametri fondamentali, non si è alterato il primitivo concetto dei sistemi cristallini, ma all'opposto lo si è rinforzato togliendo nello stesso tempo la subordinazione dell'equivalenza degli assi e della simmetria.

Non sarà difficile di suddividere il sistema esagonale nel sistema esagonale propriamente detto e nel sistema trigonale con le limitazioni usualmente accettate; basterà p. es. aggiungere, al carattere suesposto, che nel sistema esagonale non vi sono mai meno di 6 zone egualmente inclinate verso la zona principale, e nel sistema trigonale ve ne sono tre.

Il criterio della zona normale a faccia come condizione geometrica necessaria per il verificarsi di una data simmetria, può essere punto di origine per dimostrare elementarmente le 32 simmetrie possibili nei cristalli, e in ogni sistema. Ma io mi sono limitato qui esclusivamente ai sistemi cristallini; ed uscirei dallo scopo, che mi sono prefisso nel pubblicare questa Nota, se volessi divagare in altri problemi, per quanto fra loro connessi. Essi potrebbero, al più, formare oggetto di un'altra Nota.