ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale.* Nota di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. In questa Nota, e in un'altra che le farà immediatamente seguito, mi occupo della propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore metallico toroidale, assumendo a caratterizzare la dipendenza dal tempo un fattore complesso del tipo $e^{i\nu t}$ (ν cost. reale) e supponendo il campo elettromagnetico identico in tutti i piani meridiani del toro (¹). Subordinatamente a tali ipotesi, riferisco la mia ricerca alla propagazione d'onde che in corrispondenza ad un valore prefissato dell'intensità efficace della corrente, minimizza il valor medio (rispetto al tempo) del calore di Joule (relativo a un tratto qualunque del conduttore): cioè alla propagazione d'onde che al crescere indefinito del raggio della circonferenza direttrice del toro (²), si riduce alla propagazione che viene ordinariamente assunta come tipica nel caso di un conduttore cilindrico (a sezione circolare).

Di una tale propagazione è facile provare l'unicità: della sua effettiva esistenza non do in questo lavoro una dimostrazione rigorosa altro che nel caso particolare dei campi stazionari, e ammettendola senz'altro pel caso generale, determino un'espressione del campo elettromagnetico che ha valore tutte le volte che il toro sia sottile, cioè sia piccolo il rapporto φ tra il raggio della sua sezione meridiana e il raggio della sua circonferenza direttrice. Per brevità non sto qui a riassumere i risultati cui così pervengo, e mi limito a rilevare che per la propagazione d'onde in questione il distacco dalle formole relative al caso cilindrico si manifesta per quel che riguarda gli elementi locali del campo elettromagnetico (forza elettrica, magnetica, ecc.), appena si tenga conto di quantità dell'ordine di grandezza di φ: per quel che riguarda gli elementi globali (calore di Joule, resistenza efficace, autoinduzione ecc.), solo quando si tenga conto anche di quantità dell'ordine di grandezza di φ^2.

Aggiungerò infine, rimandando di questo la dimostrazione a un prossimo lavoro, che la teoria delle funzioni di linea dà modo di trasportare inalterate tutte le formole stabilite al caso generale di un tubo conduttore sottile (a sezione circolare, ma) a direttrice qualunque: colla sola avvertenza

(¹) Ciò che dal lato matematico è perfettamente compatibile colla forma delle equazioni del campo, e fisicamente è giustificato tutte le volte che la lunghezza d'onda relativa alla propagazione considerata sia grandissima rispetto alle dimensioni del conduttore.

(²) V. A. Signorini, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Questi Rend., vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem.

di sostituire in esse al raggio della circonferenza direttrice del toro, il raggio di curvatura della direttrice del conduttore, relativo alla sezione cui le formole stesse hanno da essere riferite.

§ 2. Siano: C la circonferenza direttrice del toro; a il suo raggio; z l'arco di C contato da un'origine arbitraria; P un punto qualunque del toro; C la sua proiezione su C; S la sezione normale del toro condotta per C; b il raggio di S; n la normale ad S orientata concordemente al verso positivo di C. Riferito il piano di S ad un sistema di coordinate polari di origine C, assumendo il raggio di C (orientato verso il centro) come raggio polare, e contando le anomalie in verso destrorso rispetto al verso positivo di C, siano infine r, ϑ i valori di tali coordinate in P. Posto:

$$\varphi = \frac{b}{a} \qquad \varrho = \frac{r}{b}$$

riferiamo le equazioni dell'elettrodinamica al sistema di coordinate curvilinee (z, ϱ, ϑ). Dentro il toro, supposto il campo elettromagnetico indipendente da z e trascurando le correnti di spostamento, le equazioni di Heaviside-Hertz

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H} \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E}$$

assumono allora, con ovvio significato dei simboli, la forma seguente [1]:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{4\pi\sigma b}{c}\,\mathrm{E}_n &= \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial(\varrho \mathrm{H}_z)}{\partial\varrho} - \frac{\partial \mathrm{H}_\varrho}{\partial\vartheta}\right\} \\ \frac{4\pi\sigma b}{c}\,\mathrm{E}_\varrho &= \frac{1}{\varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\mathrm{H}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\} \\ \frac{4\pi\sigma b}{c}\,\mathrm{E}_z &= \frac{-1}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left\{\mathrm{H}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{\mu b}{c}\frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial t} &= \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial(\varrho \mathrm{E}_z)}{\partial\varrho} - \frac{\partial \mathrm{E}_\varrho}{\partial\vartheta}\right\} \\ -\frac{\mu b}{c}\frac{\partial \mathrm{H}_\varrho}{\partial t} &= \frac{1}{\varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\mathrm{E}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\} \\ -\frac{\mu b}{c}\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial t} &= \frac{-1}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left\{\mathrm{E}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\}. \end{aligned}\right.$$

[1] V. A. Signorini, *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Questi Rend., vol. XXV, ser. 5ª, 1° sem.

Evidentemente si può sempre soddisfare a queste equazioni ponendo, qualunque siano P e t:

$$(3) \qquad \mathrm{E}_\rho = \mathrm{E}_z = \mathrm{H}_n = 0\,.$$

§ 3. Supposto il campo elettromagnetico non stazionario, assumiamo a caratterizzare la dipendenza dal tempo un fattore complesso del tipo $e^{i\nu t}$ (ν cost. reale $\neq o$) e poniamo

$$k = \sqrt{\frac{-4\pi i \mu \nu \sigma}{c^2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,|k|\,.$$

Nel toro si avrà così una propagazione di onde elettromagnetiche P, il cui studio quando valgono le (3) si ridurrà essenzialmente a quello dell'unica equazione

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}_n}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{E}_n}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mathrm{E}_n}{\partial \varrho} -$$

$$- \varphi\,\frac{\cos\vartheta\,\dfrac{\partial \mathrm{E}_n}{\partial \varrho} - \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\dfrac{\partial \mathrm{E}_n}{\partial \vartheta}}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta} - \frac{\varphi^2\,\mathrm{E}_n}{(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)^2} + b^2\,k^2\,\mathrm{E}_n = 0\,,$$

ottenuta eliminando (per derivazione rispetto a t) H_ρ ed H_z tra la $(1)_1$ e le $(2)_2$, $(2)_3$.

§ 4. Siano $\mathbf{E}^{(m)}$, $\mathbf{H}^{(m)}$ i valori di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{H}$ relativi ad una propagazione d'onde P_m (supposta esistente) che in corrispondenza ad un determinato valore J dell'intensità efficace della corrente [1]:

$$\mathrm{J}_{eff} = \sigma \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \left[\mathrm{R}_e \int_{\mathrm{S}} \mathrm{E}_n\, d\mathrm{S}\right]^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left|\int_{\mathrm{S}} \mathrm{E}_n\, d\mathrm{S}\right|$$

minimizzi il valore medio rispetto a t del calore di Joule relativo a una qualunque sezione normale del conduttore. Siccome nel sistema di coordinate curvilinee (z, ϱ, ϑ) l'elemento del volume è espresso da $dr\, d\varrho\, d\vartheta\, \varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)$, avremo, come espressione di tale valore medio:

$$\mathrm{Q} = \frac{\sigma\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_{\mathrm{S}} \{\mathrm{R}_e^2(\mathrm{E}_n) + \mathrm{R}_e^2(\mathrm{E}_z) + \mathrm{R}_e^2(\mathrm{E}_\rho)\}\,(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\, d\mathrm{S} =$$

$$= \frac{\sigma}{2}\int_{\mathrm{S}} \{|\mathrm{E}_n|^2 + |\mathrm{E}_z|^2 + |\mathrm{E}_\rho|^2\}\,(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\, d\mathrm{S}$$

[1] Adottiamo fin da ora i simboli consueti $\mathrm{R}_e(a)$, $\mathrm{I}_m(a)$ per rappresentare rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di una quantità complessa a: talvolta però ci sarà più comodo scrivere a', a'' al posto di $\mathrm{R}_e(a)$, $\mathrm{I}_m(a)$.

Evidentemente dovrà essere: $E_\rho^{(m)} = E_\vartheta^{(m)} = (H_n^{(m)} =) 0$. È poi facile convincersi che non può esistere più di una propagazione d'onde che soddisfi alla condizione voluta (¹) (quando si considerino, naturalmente, come identici

(¹) Supposto invero che ne esistano due, $P_m^{(1)}$ e $P_m^{(2)}$, siano $E_1^{(m)}$, $E_2^{(m)}$ i valori ad esse relativi di E_n. In base alla condizione

$$J = J_{eff} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \int_S E_1^{(m)} dS \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \int_S E_2^{(m)} dS \right|$$

potremo sempre ammettere che sia

$$\int_S E_1^{(m)} dS = \int_S E_2^{(m)} dS ,$$

onde, stante la linearità della (4) rispetto ad E_n, qualunque sia la costante (complessa) γ, si avrà una propagazione d'onde corrispondente al valore J dell'intensità efficace, assumendo

$$E_\rho = E_\vartheta = 0 \qquad E_n = E_1^{(m)} + \gamma(E_2^{(m)} - E_1^{(m)}) .$$

Per una tale propagazione, posto

$$\gamma = \gamma' + i\gamma'' \qquad \int_S E_1^{(m)} \{ \bar{E}_2^{(m)} - \bar{E}_1^{(m)} \} (1 - \varrho\varphi \cos\vartheta)\, dS = I' + i\, I''$$

è

$$Q = \frac{\sigma}{2} \left\{ \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS + 2(\gamma' I' + \gamma'' I'') + \right.$$
$$\left. + (\gamma'^2 + \gamma''^2) \int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS \right\} .$$

In conseguenza (al variare di γ' e γ'') Q assumerà anche il valore (minimo):

$$Q = \frac{\sigma}{2} \left\{ \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS - \frac{I'^2 + I''^2}{\int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta) dS} \right\} .$$

Non potendo, per ipotesi, essere mai

$$Q < \frac{\sigma}{2} \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS ,$$

ciò porta di conseguenza $I' = I'' = 0$, e successivamente:

$$\int_S |E_2^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS = \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS +$$
$$+ \int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS .$$

E questo è inconciliabile coll'ipotesi che $P_m^{(1)}$ e $P_m^{(2)}$ corrispondano allo stesso valore del calore di Joule, se non è:

$$\int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS = 0 ,$$

cioè, (dal momento che essendo $\nu \neq 0$ il campo elettrico individua il campom agnetico) se $P_m^{(1)}$ e $P_m^{(2)}$ non coincidono.

due campi elettromagnetici che possano dedursi l'uno dall'altro moltiplicando E ed H solo per una costante complessa di modulo 1).

§ 5. Ammettiamo che esista una P_m per ogni valore di $(\nu, \mu, \sigma, b, e)\,\varphi$: ammettiamo ulteriormente che sia possibile porre

$$(5)\qquad \mathrm{E}_n^{(m)} = e^{i\nu t} \sum_0^\infty{}_i\, \varphi^i e_i = e^{i\nu t} \sum_0^\infty{}_i\, \varphi^i \sum_0^\infty{}_l\, e_{il} \cos l\vartheta\,,$$

ove le e_{il} (le e_i) dipendono da ϱ (da ϱ e ϑ) ma non da φ, e, almeno dentro il toro, sono funzioni regolari dei loro argomenti.

Il valore di Q corrispondente a P_m sarà allora espresso da [1]:

$$(6)\qquad \mathrm{Q}^{(m)} = \frac{\sigma}{2}\Big\{ \int_{\mathrm{S}} e_0 \bar{e}_0\, d\mathrm{S} + \varphi \int_{\mathrm{S}} (e_0 \bar{e}_1 + e_1 \bar{e}_0 - \varrho \cos\vartheta\, e_0 \bar{e}_0)\, d\mathrm{S} +$$
$$+ \varphi^2 \int_{\mathrm{S}} (e_0 \bar{e}_2 + e_1 \bar{e}_1 + e_2 \bar{e}_0 - \varrho \cos\vartheta\, [e_0 \bar{e}_1 + e_1 \bar{e}_0])\, d\mathrm{S} + \cdots \Big\}.$$

Introducendo nella (4) l'espressione (5) di $\mathrm{E}_n^{(m)}$, sviluppando il primo membro in serie ordinata per le potenze di φ ed eguagliando a zero i coefficienti delle singole potenze di φ, si trova:

$$(7)\qquad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 e_0}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 e_0}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e_0}{\partial\varrho} + k^2 b^2 e_0 = 0$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 e_1}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 e_1}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e_1}{\partial\varrho} + k^2 b^2 e_1 = \cos\vartheta \frac{\partial e_0}{\partial\varrho} - \operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e_0}{\partial\vartheta}$$

$$(9)\qquad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 e_2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e_2}{\partial\varrho} + k^2 b^2 e_2 =$$
$$= \varrho\cos\vartheta \Big\{ \cos\vartheta \frac{\partial e_0}{\partial\varrho} - \operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e_0}{\partial\vartheta} \Big\} + \cos\vartheta \frac{\partial e_1}{\partial\varrho} - \operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{\varrho}\frac{\partial e_1}{\partial\vartheta} + e_0$$

ecc. ecc.

Vedremo nei prossimi paragrafi che queste equazioni forniscono per ciascuna delle $e_{0l}, e_{1l}, e_{2l}, \ldots$ un'espressione in cui resta indeterminata solo una costante d'integrazione δ_{il} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, da supporsi, come le e_{il}, indipendente da φ. La determinazione delle δ dovrà, naturalmente, essere eseguita in base alle condizioni che definiscono la P_m. A questo scopo osser-

(1) Si osservi che le e_i sono necessariamente da supporre funzioni pari di ϑ, perchè, come è subito visto, la P_m, in conseguenza della sua unicità, deve risultare simmetrica rispetto al piano della circonferenza direttrice del toro.

Qui e nel seguito il soprassegno sta ad indicare, come è di consuetudine, il passaggio da una quantità complessa alla sua coniugata.

veremo in primo luogo che subordinatamente alla (5) si ha

$$J_{eff}=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left|\sum_0^\infty{}_i\,\varphi_i\int_S e_i\,dS\right|=\left|\sum_0^\infty{}_i\,\varphi^i\int_S e_{i0}\,dS\right|,$$

onde la condizione

(10) $$J_{eff}=J$$

sarà soddisfatta qualunque sia φ, allora e allora soltanto che le δ siano scelte in modo che risulti:

(11) $$J=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left|\int_S l_{00}\,dS\right|$$ (12) $$\int_S l_{i0}\,dS=0 \quad (i=1,2,\ldots).$$

In corrispondenza a ciò, cercheremo di individuare le singole δ con un procedimento d'esclusione. Precisamente, scarteremo quei valori delle δ pei quali si sia potuto riconoscere che, anche solo per uno speciale valore di φ, non minimizzano $Q^{(m)}$ subordinatamente alle (11) e (12): e quando accada che dagli scarti fatti non rimanga escluso per una delle δ altro che un valore ben determinato e finito, riterremo senz'altro che esso sia il valore cercato di tale δ. Questo procedimento, come vedremo, risulta sufficiente alla determinazione completa della $E_n^{(m)}$, almeno nell'ordine d'approssimazione cui limiteremo la nostra ricerca: ma non è da tacere che le ipotesi già fatte riguardo all'esistenza e alla proprietà della P_m non sono sufficienti a giustificarlo rigorosamente. Del resto, fin da quando abbiamo ammessa senza dimostrazione l'esistenza della P_m, ci siamo posti da un punto di vista essenzialmente euristico, rinunziando a svolgere la ricerca in modo che non si prestasse ad alcuna obbiezione di carattere rigorista.

§ 6. Dalla (7), posto $x=kb\varrho$, segue

$$\frac{d^2e_{0l}}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{de_{0l}}{x}+\left(1-\frac{l^2}{x^2}\right)e_{0l}=0 \qquad (l=0,1,\ldots)$$

onde e_{0l}, dovendo anche per ($\varrho=0$, cioè) $x=0$, mantenersi finita, risulta espressa, come è ben noto, da:

$$l_{0l}=\delta_{0l}\,J_l(x) \qquad (l=0,1,\ldots).$$

La (11) fornisce per la δ_{00}:

$$|\delta_{00}|=\frac{\sqrt{2}\,J}{\sigma\left|\int_S J_0(x)\,dS\right|},$$

donde è per noi lecito dedurre [1]

$$\delta_{00} = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{J}}{\sigma \int_{\mathrm{S}} \mathrm{J}_0(x)\, d\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{J}\sqrt{2}\,k}{2\pi\sigma\, b\, \mathrm{J}_1(kb)}. \tag{13}$$

D'altra parte [2] $\mathrm{Q}^{(m)}$ non potrà per $\varphi = 0$ assumere il minimo valore compatibile colla (10) altro che quando sia

$$\delta_{0l} = 0 \qquad (l \geq 1).$$

Sarà dunque da assumere

$$e_0 = \delta_{00}\,\mathrm{J}_0(x) = \frac{\mathrm{J}\sqrt{2}\,k}{2\pi\sigma\, b\,\mathrm{J}_1(kb)}\,\mathrm{J}_0(x). \tag{14}$$

§ 7. Dalla (7) tenendo conto della (14), si ha

$$\frac{d^2 e_{1l}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de_{1l}}{dx} + \left(1 - \frac{l^2}{x^2}\right) e_{1l} = 0 \qquad (l \neq 1) \tag{15}$$

$$\frac{d^2 e_{11}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de_{11}}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e_{11} = -\,\mathrm{K}\,\mathrm{J}'_0(x) \tag{16}$$

ove si è posto

$$\mathrm{K} = -\frac{\delta_{00}}{kb}.$$

Dalla (15) risulta subito

$$e_{1l} = \delta_{1l}\,\mathrm{J}_l(x),$$

e in conseguenza la (11) dà

$$\int_{\mathrm{S}} e_{10}\, d\mathrm{S} = \frac{2\pi\delta_{10}}{k^2}\int_0^{kb} \mathrm{J}_0(x)\, x\, dx = \frac{2\pi\delta_{10}}{k}\, b\,\mathrm{J}_1(kb) = 0,$$

cioè, la $\mathrm{J}_n(x)$ non avendo mai radici complesse [3], $\delta_{10} = 0$. Dalle (16) si ottiene poi [4]:

[1] Cfr. § 4 in fine.
[2] Ved. loc. cit. [2] a pag. 1.
[3] Cfr., ad es., Riemann-Weber, *Die Partiellen differential-Gleichungen der Mathematischen-Physik*, Bd. I, § 74.
[4] Fin da questo punto è forse utile rilevare che, qualunque sia n:
1°) valgono le ben note identità

$$\frac{2(n-1)\,\mathrm{J}_{n-1}(x)}{x} = \mathrm{J}_{n-2}(x) + \mathrm{J}_n(x) \qquad \frac{2\,d\mathrm{J}_{n-1}(x)}{dx} = \mathrm{J}_{n-2}(x) - \mathrm{J}_n(x);$$

2°) l'equazione

$$\frac{d^2 e(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de(x)}{dx} + e\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

$$e_{11} = J_1(x)\left\{\delta_{11} - K\int_0^x \frac{dx'}{x'\,J_1^2(x')}\int_0^{x'} x''\,J_1^2(x'')\,dx''\right\} =$$

$$= J_1(x)\left\{\delta_{11} - K\int_0^x \frac{dx'}{x'\,J_1^2(x')}\cdot\frac{x'}{2}\,J_1^2(x')\,\frac{d}{dx'}\left[x'\,\frac{J_2(x')}{J_1(x)}\right]\right\} =$$

$$= (\delta_{11} - K)\,J_1(x) + \frac{Kx}{2}\,J_0(x)\,.$$

Se ne conclude, la e_1 è del tipo:

$$(17)\qquad e_1 = \cos\vartheta\left\{(\delta_{11} - K)\,J_1(x) + \frac{Kx}{2}\,J_0(x)\right\} + \sum_{2}^{\infty}{}_l\,\delta_{1l}\cos l\vartheta\,J_l(x)\,.$$

§ 8. Dalla (9) in base alle (14), (17) segue

$$\frac{d^2e_{20}}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{de_{20}}{dx} + e_{20} = \frac{1}{2kbx}\,\frac{d}{dx}\left\{x\,e_{11} + \frac{x^2}{kb}\,e_{00}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2kbx}\,\frac{d}{dx}\left\{(\delta_{11} - K)\,J_1(x)\,x + \frac{3K}{2}\,x^2\,J_0(x)\right\},$$

---

essendo soddisfatta da $e(x) = J_n(x)$, l'integrale più generale dell'equazione

$$\frac{d^2e(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{de(x)}{dx} + e\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = F(x)$$

che si mantenga finito per $x = 0$, è dato da

$$e(x) = J_n(x)\left\{\delta + \int_0^x \frac{dx'}{x'\,J_n^2(x')}\int_0^{x'} x''\,F(x'')\,J_n(x'')\,dx''\right\};$$

2°) dalla formola ben nota

$$2\alpha\int_0^1 \varrho\,J_n^2(\alpha\varrho)\,d\varrho = J_n(\alpha)\,J_{n+1}(\alpha) + \alpha\left[J'_{n+1}(\alpha)\,J_n(\alpha) - J'_n(\alpha)\,J_{n+1}(\alpha)\right],$$

segue

$$\int_0^{x'} x''\,J_n^2(x'')\,dx'' = \frac{x'}{2}\left\{J_n(x')\,J_{n+1}(x') + x'\left[J'_{n+1}(x')\,J_n(x') - J'_n(x')\,J_{n+1}(x')\right]\right\} =$$

$$= \frac{x'}{2}\,J_n^2(x')\,\frac{d}{dx'}\left(\frac{x'\,J_{n+1}(x')}{J_n(x')}\right).$$

donde risulta

$$e_{20} = J_0(x) \Big\{ \delta_{20} + \frac{1}{2kb} \int_0^x \frac{dx'}{x' J_0^2(x')} \int_0^{x'} J_0(x) \times$$

$$\times \frac{d}{dx} \Big[(\delta_{11} - K) J_1(x) x + \frac{3K}{2} x^2 J_0(x) \Big] \Big\} =$$

$$= J_0(x) \Big\{ \delta_{20} + \frac{1}{2kb} \int_0^x \frac{dx'}{x' J_0^2(x)} \times$$

$$\times \int_0^{x'} \Big[x'' J_0^2(x'') (\delta_{11} + 2K) - \frac{3}{2} K x''^2 J_0(x'') J_1(x'') \Big] \Big\} dx'' =$$

$$= J_0(x) \Big\{ \delta_{20} + \frac{1}{2kb} \int_0^x \frac{dx'}{x' J_0^2(x')} \times$$

$$\times \Big[\frac{3x'^2}{4} J_0^2(x') + \Big(\delta_{11} + \frac{K}{2} \Big) \int_0^x x'' J_0^2(x'') \, dx'' \Big] \Big\} =$$

$$= \delta_{20} J_0(x) + \frac{1}{4kb} \Big(\delta_{11} + \frac{K}{2} \Big) x J_1(x) + \frac{3K}{16kb} x^2 J_0(x) .$$

Per la (12) la δ_{20} dovrà essere determinata (in funzione di δ_{11}) in modo da soddisfare l'equazione

$$0 = \int_0^{kb} e_{20} \, x \, dx = \int_0^{kb} x \Big\{ \delta_{20} J_0(x) + \frac{1}{4kb} \Big(\delta_{11} + \frac{K}{2} \Big) x J_1(x) + $$

$$+ \frac{3K}{16kb} x^2 J_0(x) \Big\} .$$

Siccome è

$$\int_0^{kb} J_0(x) \, x \, dx = kb \, J_1(kb)$$

$$\int_0^{kb} x^2 J_1(x) \, dx = - k^2 b^2 J_0(kb) + 2kb \, J_1(kb)$$

$$\int_0 x^3 J_0(x) \, dx = 2k^2 b^2 J_0(kb) + kb \, J_1(kb) (k^2 b^2 - 4) ,$$

ciò dà senza difficoltà

$$\delta_{20} = - \frac{J_2(kb)}{4 J_1(kb)} (\delta_{11} - K) - \frac{3 \delta_{00}}{16} :$$

e in conseguenza

$$(18) \qquad \delta_{20} = J_0(x) \Big\{ \frac{K - \delta_{11}}{4} \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} - \frac{3 \delta_{00}}{16} \Big\} +$$

$$+ \frac{x J_1(x)}{4kb} \Big(\delta_{11} + \frac{K}{2} \Big) + \frac{x^2 J_0(x) 3K}{16kb}$$