ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 aprile 1915.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale.* Nota II di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 9. Introducendo le espressioni (14), (17), (18) di e_0, e_1, e_{20} nella (6), e ponendo, in generale

$$\mathrm{I}_{lm}^{(n)} = \int_0^1 \mathrm{J}_l(x)\, \mathrm{J}_m(\bar{x})\, \varrho^n\, d\varrho\,,$$

si trova

$$\mathrm{Q}^{(m)} = \frac{\pi\sigma b^2 |\delta_{00}|^2}{2} \Big\{ 2\mathrm{I}_{00}^{(1)} + \varphi^2 \Big[\frac{3}{2} \mathrm{R}_e \Big(\frac{\mathrm{I}_{01}^{(2)}}{kb} \Big) - \frac{3}{4} \mathrm{I}_{00}^{(1)} + \tag{19}$$

$$+ \Big| \frac{\delta_{11} - \mathrm{K}}{\delta_{00}} \Big|^2 \mathrm{I}_{11}^{(1)} - \mathrm{I}_{00}^{(1)} \mathrm{R}_e \Big(\frac{\delta_{11} - \mathrm{K}}{\delta_{00}} \frac{\mathrm{J}_2(\bar{k}b)}{\mathrm{J}_1(\bar{k}b)} \Big) + \sum_2^\infty {}_l \Big| \frac{\delta_{1l}}{\delta_{00}} \Big|^2 \mathrm{I}_{ll}^{(1)} \Big] + \cdots \Big\}\,.$$

Ne risulta che dovremo:

1°) porre

$$\delta_{1l} = 0 \qquad (l = 2\,, 3\,, \ldots)\,; \tag{20}$$

2°) determinare $\mathrm{R}_e \Big(\frac{\delta_{11} - \mathrm{K}}{\delta_{00}} \Big)$ e $\mathrm{I}_m \Big(\frac{\delta_{11} - \mathrm{K}}{\delta_{00}} \Big)$ (cioè δ_{11}) in modo da minimizzare l'espressione cui si riduce, in base alle (20), il coefficiente di φ^2.

Invero, se le δ_{1l} ($l = 1, 2, 3 \ldots$) venissero scelte in modo differente, comunque si scegliessero poi le δ_{2l}, δ_{3l} ecc., sarebbe evidentemente impossibile che, almeno per valori comunque piccoli di φ, $Q^{(m)}$ venisse ad avere il minimo valore che è compatibile colle (11) e (12).

In base alla condizione di minimo sopra specificata, posto

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{I_{00}^{(1)}}{I_{11}^{(1)}} \frac{J_2(\bar{k}b)}{J_1(\bar{k}b)},$$

si trova

$$\frac{\delta_{11} - K}{\delta_{00}} = \delta. \tag{21}$$

Dopo questo, risulta completamente determinata la e_{11}, ed anche la stessa $E_n^{(m)}$ tutte le volte che siano trascurabili le quantità dell'ordine di grandezza di φ^2. Precisamente, in base alle (14), (17), (18), (20), (21) — a meno di termini contenenti un fattore del tipo φ^r con $r \geq 3$, o del tipo $\varphi^2 \cos r\vartheta$ con $r \geq 1$ — si ha:

$$E_n^{(m)} = \frac{k J e^{i\nu t}}{\sqrt{2}\, \pi \sigma b J_1(kb)} \Big\{ J_0(x) + \varphi \cos\vartheta \left[\delta J_1(x) + \frac{\varrho}{2} J_0(x) \right] + \tag{22}$$
$$+ \frac{\varphi^2}{4} \left[- J_0(x) \left(\frac{\delta J_2(kb)}{J_1(kb)} + \frac{3}{4} \right) + \varrho J_1(x) \left(\delta + \frac{3}{2kb} \right) + \frac{3\varrho^2 J_0(x)}{4} \right] \Big\}.$$

Se poi poniamo

$$R = \frac{Q}{J_{eff}^2} = \text{resistenza effettiva per unità di lunghezza del conduttore,}$$

dalle (13), (19), (21) segue, a meno di un errore dell'ordine di φ^3:

$$R = \frac{|k|^2}{4\pi\sigma J_1(kb) J_1(\bar{k}b)} \left\{ 2 I_{00}^{(1)} + \varphi^2 \left[\frac{3}{2} R_e \left(\frac{I_{01}^{(2)}}{kb} \right) - \frac{3}{4} I_{00}^{(1)} - |\delta|^2 I_{11}^{(1)} \right] \right\}. \tag{23}$$

§ 10. Sarà bene di rilevare che gli integrali $I_{00}^{(1)}$, $I_{11}^{(1)}$, $R_e\left(\frac{I_{01}^{(2)}}{kb}\right)$ possono tutti quanti esprimersi per funzioni di Bessel. Infatti [1], qualunque sia l, è:

$$I_{ll}^{(1)} = R_e \left(\frac{\bar{k}}{kb} J_l(kb) J_l'(\bar{k}b) \right). \tag{24}$$

Di più, qualunque siano α, β, P, vale la formola

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^P J_0(\alpha\varrho) J_1(\beta\varrho) \varrho^2 d\varrho = \alpha P^2 J_1(\alpha P) J_1(\beta P) +$$
$$+ \beta P^2 J_0(\alpha P) J_0(\beta P) - 2\beta \int_0^P J_0(\alpha\varrho) J_0(\beta\varrho) \varrho \, d\varrho,$$

[1] Ved. loc. cit. [2], a pag. 1 della Nota I, § 8.

onde in particolare è

(25) $$R_e\left(\frac{I_{01}^{(2)}}{kb}\right)=\frac{1}{2|k|^2 b^2}J_1(kb)\,J_1(\bar{k}b).$$

§ 11. Posto

$$\Psi=\Psi'+i\Psi''=\frac{4\pi\sigma\,E_n^{(m)}(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)}{c\,b\,k^2}+\text{cost},$$

dalle $(2)_2$ e $(2)_3$ segue

(26) $$R_e(H_\varrho)=\frac{1}{\varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\frac{\partial\Psi'}{\partial\vartheta}\qquad R_e(H_\mathfrak{z})=\frac{-1}{(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\frac{\partial\Psi'}{\partial\varrho},$$

ciò che prova che nel piano di S le linee $\Psi'=\text{cost}$ sono, istante per istante, le linee di forza magnetica. In base alla (22) tali linee, ed anche $H_\mathfrak{z}$ ed H_ϱ risultano determinate a meno di un errore dell'ordine di grandezza di φ^2 Senza insistere su ciò, avvertiamo che dalle $(2)_3$ e (22) segue, per $\varrho=1$, l'eguaglianza

(27) $$H_\mathfrak{z}(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)=$$

$$=\frac{4\pi\sigma\delta_{00}e^{i\nu t}}{c\,b\,k^2}\Big\{kb\,J_1(kb)+\varphi\cos\vartheta\left[\frac{1}{2}J_0(kb)-\frac{1}{2}kb\,J_1(kb)-\delta kb\,J_1'(kb)\right]+$$

$$+\varphi^2\left[\frac{\delta kb}{2}J_1'(kb)-\frac{1}{4}J_0(kb)-\frac{kb}{4}J_1(kb)\right]\Big\},$$

colla stessa specificazione, relativamente all'ordine d'approssimazione, che vale per la (22).

§ 12. Sia $\mathbf{U}^{(m)}$ il vettore complesso di Poynting $\left(=\frac{c}{8\pi}\mathbf{E}^{(m)}\wedge\overline{\mathbf{H}}^{(m)}\right)$ relativo alla $P^{(m)}$, e $\Phi^{(m)}$ il valore (indipendente da t) del flusso entrante di $\mathbf{U}^{(m)}$ attraverso la superficie che racchiude un tratto di conduttore di lunghezza unitaria. Su tale superficie la componente di $\mathbf{U}$ secondo la normale interna sarà diversa da zero soltanto in quella sua parte che appartiene anche alla superficie del toro, ed ivi avrà il valore $\frac{c}{8\pi}E_n^{(m)}\overline{H}_\mathfrak{z}^{(m)}$.

Avremo dunque

(28) $$\Phi^{(m)}=\frac{cb}{8\pi}\int_0^{2\pi}E_n^{(m)}\,\overline{H}_\mathfrak{z}^{(m)}(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)\,d\vartheta:$$

invero nel sistema di coordinate curvilinee (z,ϱ,ϑ) l'elemento di superficie del toro è espresso da $b\,dz\,d\vartheta\,(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)$.

D'altra parte, detto $T^{(m)}$ il valor medio rispetto al tempo dell'energia magnetica per unità di lunghezza del conduttore, si ha, come è ben noto,

$$Q^{(m)} = R_e(\Phi^{(m)}) \qquad T^{(m)} = \frac{1}{2\nu} I_m(\Phi^{(m)}) \,,$$

onde potremo servirci della (28) [per verificare l'esattezza dell'espressione (23) di R, e] per calcolare $T^{(m)}$, e il coefficiente d'autoinduzione effettiva interna

$$L_i = \frac{2c^2 \, T^{(m)}}{J^2} \,.$$

Introducendo nella (28) i valori per $\varrho = 1$ di $E_n^{(m)}$ e di $H_z^{(m)}(1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)$ dati dalle (22) e (27), si ha:

$$\Phi^{(m)} = \frac{\pi\sigma b^2 \delta_{00} \bar{\delta}_{00}}{2} \Bigg\{ -\frac{2\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) + \tag{29}$$
$$+ \varphi^2 \Bigg[\delta\bar{\delta} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_1(kb) J_1'(\bar{k}b) - \frac{1}{2} \bar{\delta} \frac{kb}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1'(\bar{k}b) +$$
$$+ \frac{1}{2} \delta \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} - \frac{1}{2} \delta \frac{J_1(kb) J_0(\bar{k}b)}{k^2 b^2} +$$
$$+ \frac{3\bar{k}b}{4k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) + \frac{1}{4} \frac{J_0(kb) J_0(\bar{k}b)}{k^2 b^2} - \frac{3}{4} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_1(kb) J_1(\bar{k}b) \Bigg] \Bigg\} .$$

Si ha poi

$$\frac{1}{2} \delta \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} - \tag{30}$$
$$- \frac{1}{2} \delta \frac{J_1(kb) J_0(\bar{k}b)}{k^2 b^2} - \frac{1}{2} \bar{\delta} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1'(\bar{k}b) =$$
$$= \frac{1}{2} R_e \Bigg\{ \delta \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) +$$
$$+ \frac{\delta[J_1(kb) - kb\, J_1'(kb)]}{J_1(kb)} \frac{J_0(\bar{k}b) J_1(kb)}{\bar{k}^2 b^2} \Bigg\} +$$
$$+ \frac{i}{2} I_m \Bigg\{ \Bigg[\frac{\delta}{kb} \frac{kb\, J_2(kb)}{J_1(kb)} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{k}b} \Bigg] \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) +$$
$$+ \frac{\delta J_1'(kb)}{J_1(kb)} \frac{kb}{\bar{k}^2 b^2} J_0(\bar{k}b) J_1(kb) \Bigg\} =$$
$$= R_e\left(\delta \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)}\right) R_e\left(\frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b)\right) +$$
$$+ i\, I_m\left(\frac{\delta}{kb}\right) R_e\left(\frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b)\right) -$$
$$- i\, R_e\left(\frac{\delta J_1'(kb)}{J_1(kb)}\right) I_m\left(\frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b)\right) .$$

Poniamo, qualunque sia l [1],

$$\overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{ll}^{(1)} = \mathrm{I}_m \frac{\bar{k} b\, \mathrm{J}_l(kb)\, \mathrm{J}_l'(\bar{k}b)}{k^2 b^2}.$$

e teniamo presente la (24). Dalle (29) e (30) otterremo allora, senza difficoltà,

$$(31) \quad \mathrm{Q}^{(m)} = \mathrm{R}_e(\Phi^{(m)}) = \frac{\pi\sigma b^2 \delta_{00} \bar{\delta}_{00}}{2} \Big\{ 2\,\mathrm{I}_{00}^{(1)} + \varphi^2 \Big[\delta\bar{\delta}_{11}^{(1)} - \mathrm{I}_{00}^{(1)} \mathrm{R}_e\Big(\frac{\delta \mathrm{J}_2(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)}\Big) - \frac{3}{4}\mathrm{I}_{00}^{(1)} + \frac{3}{4}\frac{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}{|k|^2 b^2}\Big]\Big\},$$

$$(32) \quad \mathrm{T}^{(m)} = \frac{1}{2}\mathrm{I}_m(\Phi^{(m)}) = \frac{\pi\sigma b^2 \delta_{00}\bar{\delta}_{00}}{4\nu}\Big\{ 2\overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{00}^{(1)} + \varphi^2 \Big[\delta\bar{\delta}\, \overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{11}^{(1)} - \mathrm{I}_{00}^{(1)} \mathrm{I}_m\Big(\frac{\delta}{kb}\Big) + \overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{00}^{(1)} \mathrm{R}_e\Big(\frac{\delta \mathrm{J}_1'(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)}\Big) - \frac{3}{4}\overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{00}^{(1)} + \frac{1}{4}\frac{\mathrm{J}_0(kb)\,\mathrm{J}_0(k\bar{b})}{|k|^2 b^2}\Big]\Big\}.$$

La (31) [cfr. anche la (25)] coincide sostanzialmente colla (23); la (32) fornisce come valore di L_i

$$(33) \quad \mathrm{L}_i = \frac{\mu}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}\Big\{ 2\overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{00}^{(1)} + \varphi^2 \Big[\delta\bar{\delta}\, \overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{11}^{(1)} - \mathrm{I}_{00}^{(1)} \mathrm{I}_m\Big(\frac{\delta}{kb}\Big) + \overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{00}^{(1)} \mathrm{R}_e\Big(\frac{\delta \mathrm{J}_1'(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)}\Big) - \frac{3}{4}\overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{00}^{(1)} + \frac{1}{4}\frac{\mathrm{J}_0(kb)\,\mathrm{J}_0(\bar{k}b)}{|k|^2 b^2}\Big]\Big\}.$$

§ 13. Studiamo il comportamento asintotico della $P^{(m)}$ al crescere indefinito di $|k|$, trascurando, secondo il solito, nel computo degli elementi locali del campo elettromagnetico le quantità dell'ordine di grandezza di φ^2, e nel computo degli elementi globali le quantità dell'ordine di grandezza di φ^3. Da formole ben note segue:

1°) $$(34) \qquad \lim_{|k|=\infty} \frac{\mathrm{J}_0(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)} = -\lim_{|k|=\infty}\frac{\mathrm{J}_2(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)} = \lim_{|k|=\infty}\frac{\mathrm{J}_1'(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)} = i\,;$$

2°) per $\varrho < 1$, qualunque sia r: $$(35) \quad \lim_{|\;\;|=\infty} k^r \frac{\mathrm{J}_0(kb\varrho)}{\mathrm{J}_0(kb)} = 0.$$

Essendo $\bar{k} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}|k|$, dalle (34) si deduce

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{|k|=\infty}\Big(\frac{|k|}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)} \cdot \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2}\,\mathrm{J}_0(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)\Big) = -\frac{1+i}{\sqrt{2}\,b} \\ &\lim_{|k|=\infty}\Big(\frac{|k|}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)} \cdot \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2}\,\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1'(\bar{k}b)\Big) = \frac{1+i}{\sqrt{2}\,b}\,, \end{aligned}\right.$$

[1] Con ciò $\overset{\star}{\mathrm{I}}{}_{ll}$ verrà a rappresentare il valore dell'integrale

$$\frac{1}{|k|^2 b^2}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \left\{ \frac{l^2}{\varrho^2}|\mathrm{J}_l(kb\varrho)|^2 + |k|^2 |\mathrm{J}_l'(kb\varrho)|^2 \right\}$$

[ved. loc. cit. [2], a pag. 1 della Nota I, § 8].

e, successivamente,

$$\lim_{|k|=\infty}\left(\frac{|k|}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}\cdot \mathrm{I}_{ll}^{(1)}\right)=\lim_{|k|=\infty}\left(\frac{|k|}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}\cdot \overset{*}{\mathrm{I}}{}_{ll}^{(1)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\,b}\quad(l=0\,,1)$$

$$\lim_{|k|=\infty}\delta=\frac{i}{2}\,.$$

Dopo tutto questo, le (22) e (35) permettono immediatamente di concludere che per $\varrho<1$, cioè nell'interno del conduttore, è $\lim\limits_{|k|=\infty}\mathrm{E}_n^{(m)}=0$. Alla stessa conclusione si perverrebbe per $\mathrm{H}_\rho^{(m)}$ ed $\mathrm{H}_z^{(m)}$ ove se ne considerassero le espressioni effettive.

Sempre dalla (22), come espressione asintotica di $\mathrm{E}_n^{(m)}$ alla superficie del conduttore ($\varrho=1$) si deduce

$$\mathrm{E}_n^{(m)}=\frac{(1+i)\,e^{i\nu t}\,\mathrm{J}}{b\,c\,\pi}\sqrt{\frac{\pi\mu\nu}{\sigma}}\,(1+\varphi\cos\vartheta)\,;$$

ulteriormente, dalla (27) si ha

$$\lim_{|k|=\infty}[\mathrm{H}_z^{(m)}]_{\rho=1}=\frac{2\,e^{i\nu t}\,\mathrm{J}\sqrt{2}}{b\,c}\,(1+\varphi\cos\vartheta)\,,$$

ed è facile il provare che, anche per $\varrho=1$, è

$$\lim_{|k|=\infty}\mathrm{H}_\rho^{(m)}=0$$

Infine, dalle (23) e (33), tenendo conto anche della (25), si ottengono (come estensione di ben note formole di Rayleigh-Stefan) le seguenti espressioni asintotiche di R ed L_i:

$$(36)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathrm{R}&=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\nu\mu}{2\pi\sigma c^2}}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\\ \mathrm{L}_i&=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\mu c^2}{2\pi\sigma\nu}}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

§ 14. Nel caso che $|kb|$ sia piccolo rispetto all'unità, il comportamento della $P^{(m)}$ può essere facilmente caratterizzato sostituendo, nelle formole generali già stabilite, le funzioni di Bessel coi loro sviluppi in serie ordinate per le potenze crescenti dell'argomento. Non insisteremo su questo perchè ci riserbiamo di trattare nei prossimi paragrafi il caso di un campo stazionario ($\nu=k=0$), caso che — come dimostreremo e come del resto è da aspettarsi — si riattacca con continuità al caso generale al decrescere indefinito di ν. Ci limiteremo soltanto a scrivere le espressioni di R ed L_i per piccoli valori di $|kb|$ Tali espressioni, quando si trascurino le potenze di $|kb|$ superiori alla 7ª (e sempre a meno di un errore dell'ordine di φ^3) sono le seguenti:

$$(37)\quad \begin{cases} \mathrm{R} = \dfrac{1}{\pi\sigma b^2}\left\{1 + \dfrac{|k|^4 b^4}{192} - \dfrac{\varphi^2}{4}\left[1 + \dfrac{47\,|k|^4 b^4}{4608}\right]\right\} \\ \mathrm{L}_i = \dfrac{\mu^2}{2}\left\{1 - \dfrac{|k|^4 b^4}{384} - \dfrac{\varphi^2}{144}\left[67 - \dfrac{277\,|k|^4 b^4}{960}\right]\right\}. \end{cases}$$

§ 15. Per $\nu = 0$ le $(2)_2$ e $(2)_3$ dànno

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\mathrm{E}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left\{\mathrm{E}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\} = 0\,,$$

cioè

$$\mathrm{E}_n = \frac{\mathrm{C}}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta}\,,$$

ove C è una quantità (indipendente da ϱ e ϑ) che è legata all'intensità $\mathrm{J}^{(0)}$ della corrente dalla relazione

$$\mathrm{J}^{(0)} = \sigma b^2\,\mathrm{C}\int_0^1 \varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta} = \frac{2\pi\sigma b^2\,\mathrm{C}}{\varphi^2}\left\{1-\sqrt{1-\varphi^2}\right\}.$$

In conseguenza (cfr. § 4) fissato il valore di $\mathrm{J}^{(0)}$ la condizione di minimo pel calore di Joule sarà soddisfatta da un campo elettromagnetico stazionario $(\mathbf{E}^{(m,0)}, \mathbf{H}^{(m,0)})$ allora e allora soltanto che sia

$$(38)\quad \mathrm{E}_{\vartheta}^{(m,0)} = \mathrm{E}_{\varrho}^{(m,0)} = 0 \qquad \mathrm{E}_n^{(m,0)} = \frac{\varphi^2\,\mathrm{J}^{(0)}}{2\pi\sigma b^2\left(1-\sqrt{1-\varphi^2}\right)(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)}.$$

In base alle equazioni

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathbf{E}^{(m,0)} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}^{(m,0)} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H}^{(m,0)} = 0\,,$$

ciò individua il campo elettromagnetico a meno dell'aggiunta di un campo di forza newtoniano al campo magnetico.

§ 16. L'espressione ora ottenuta per $\mathrm{E}_n^{(m,0)}$ si può anche considerare come individuata per $k=0$ dalla (4), in base alla condizione che, subordinatamente all'eguaglianza

$$(39)\qquad \mathrm{J}^{(0)} = \sigma\int_{\mathrm{S}} \mathrm{E}_n\,d\mathrm{S}$$

risulti minimo

$$Q^{(0)} = \sigma \int_S E_n^2 (1 - \varrho\varphi \cos\vartheta)\, dS\,.$$

Invero:

1°) la (4), per la sua stessa origine, è soddisfatta, quando sia $k=0$, da $E_n = E_n^{(m,0)}$;

2°) per una qualunque E_n che soddisfi alla (39) e non coincida con $E_n^{(m,0)}$, si ha:

$$\int_S E_n^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS = \int_S \{E_n^{(m,0)} + [E_n - E_n^{(m,0)}]\}^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS =$$

$$= \int_S [E_n^{(m,0)}]^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS + \int_S [E_n - E_n^{(m,0)}]^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS +$$

$$+ \frac{\varphi^2 J^{(0)}}{2\pi\sigma b^2 (1 - \sqrt{1-\varphi^2})} \left\{ \int_S E_n\, dS - \int_S E_n^{(m,0)}\, dS \right\} >$$

$$> \int_S [E_n^{(m,0)}]^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS\,.$$

Questa osservazione prova che al decrescere indefinito di ν la $\mathbf{E}^{(m)}$ si riduce alla $\mathbf{E}^{(m,0)}$, purchè, s'intende, nel passaggio al limite si sostituisca J con $\dfrac{J^{(0)}}{\sqrt{2}}$; e in conseguenza dà modo di togliere l'indeterminazione già rilevata per la $\mathbf{H}^{(m,0)}$, permettendo di assumere

$$\mathbf{H}^{(m,0)} = \lim_{\nu=0} \mathbf{H}^{(m)}\,. \tag{40}$$

§ 17. Per eseguire in base alla (39) il calcolo di $H_S^{(m,0)}$, $H_\rho^{(m,0)}$, basta, in conformità alle (26) determinare il limite di Ψ per $\nu=0$. Introducendo in Ψ l'espressione (22) di E_n, ove le funzioni di Bessel siano state sostituite coi loro sviluppi in serie e si sia posto $J\sqrt{2} = J^{(0)}$, si trova senza difficoltà (pur di scegliere convenientemente la costante indeterminata che compare nell'espressione di Ψ):

$$\lim_{\nu=0} \Psi = \frac{4J^{(0)}}{cb} \left\{ -\frac{\varrho^2}{4} + \frac{\varphi\varrho\cos\vartheta}{16}\left[\varrho^2 - \frac{1}{3}\right] + \right. \tag{41}$$

$$\left. + \frac{\varphi^2}{4}\left[\frac{1}{48} + \frac{13}{48}\varrho^2 + \frac{1}{32}\varrho^4\right]\right\}.$$

Corrispondentemente si ha

$$(42)\quad \begin{cases} H_{\vartheta}^{(m,0)} = \dfrac{4J^{(0)}}{cb}\left\{\dfrac{\varrho}{2}+\dfrac{\varphi\cos\vartheta}{16}\left[5\varrho^2+\dfrac{1}{3}\right]+\dfrac{\varphi^2\varrho}{8}[\varrho^2-1]\right\} \\ H_{\varrho}^{(m,0)} = -\dfrac{4J^{(0)}}{cb}\dfrac{\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{16}\left[\varrho^2-\dfrac{1}{3}\right], \end{cases}$$

ove, come nella (41), per quello che riguarda l'ordine d'approssimazione è da mantenere la specificazione che vale per la (22). In particolare risulta dalle (42) che nel punto C $H^{(m,0)}$, è normale al piano della circonferenza direttrice del toro e in grandezza $=\dfrac{\varphi J^{(0)}}{12\,cb}$.

Le (42) possono anche servire a determinare per $\nu=0$ l'energia magnetica e l'autoinduzione interna del conduttore. Eseguendo il calcolo si trova

$$L_i=\frac{\mu}{2}\left\{1-\frac{67\,\varphi^2}{144}\right\},$$

ciò che dà una verifica della $(37)_2$. Una verifica della $(37)_1$ può aversi dalle (38), in quanto, eseguendo in base ad esse il calcolo di R per $\nu=0$, si trova

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma b^2}\,\frac{\varphi^2}{1-\sqrt{1-\varphi^2}}=\frac{1}{\pi\sigma b^2}\left\{1-\frac{\varphi^2}{4}-\cdots\right\}$$

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota II di N. ZEILON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

6. L'espressione (IV) vale per i due tipi d'equazioni integrali, e evidentemente essa è un integrale che dovrebbe calcolarsi per mezzo del teorema del Cauchy. Il caso di un'equazione del tipo del Fredholm si complica, per la presenza dei poli della D e anche per la difficoltà di sviluppare questa funzione nella prossimità dei punti β_1,β_2, radici dell'equazione

$$(5)\qquad \left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1=0.$$

Prendiamo il caso del Volterra; un residuo allora non può provenire che dalle radici β_1,β_2, e la D si sviluppa facilmente. Sia $x>0$, e

$$(6)\qquad \beta_1=-\frac{yz+ir}{x^2+y^2},\quad \frac{\beta_1 y+z}{x}=\frac{xz+iyr}{x^2+y^2},$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2;$$