ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Corrispondentemente si ha

$$(42)\quad \begin{cases} H_{\vartheta}^{(m,0)} = \dfrac{4J^{(0)}}{cb}\left\{\dfrac{\varrho}{2}+\dfrac{\varphi\cos\vartheta}{16}\left[5\varrho^2+\dfrac{1}{3}\right]+\dfrac{\varphi^2\varrho}{8}\left[\varrho^2-1\right]\right\} \\ H_{\rho}^{(m,0)} = -\dfrac{4J^{(0)}}{cb}\dfrac{\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{16}\left[\varrho^2-\dfrac{1}{3}\right], \end{cases}$$

ove, come nella (41), per quello che riguarda l'ordine d'approssimazione è da mantenere la specificazione che vale per la (22). In particolare risulta dalle (42) che nel punto C $H^{(m,0)}$, è normale al piano della circonferenza direttrice del toro e in grandezza $=\dfrac{\varphi J^{(0)}}{12cb}$.

Le (42) possono anche servire a determinare per $\nu=0$ l'energia magnetica e l'autoinduzione interna del conduttore. Eseguendo il calcolo si trova

$$L_i=\frac{\mu}{2}\left\{1-\frac{67\varphi^2}{144}\right\},$$

ciò che dà una verifica della $(37)_2$. Una verifica della $(37)_1$ può aversi dalle (38), in quanto, eseguendo in base ad esse il calcolo di R per $\nu=0$, si trova

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma b^2}\frac{\varphi^2}{1-\sqrt{1-\varphi^2}}=\frac{1}{\pi\sigma b^2}\left\{1-\frac{\varphi^2}{4}-\cdots\right\}$$

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota II di N. ZEILON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

6. L'espressione (IV) vale per i due tipi d'equazioni integrali, e evidentemente essa è un integrale che dovrebbe calcolarsi per mezzo del teorema del Cauchy. Il caso di un'equazione del tipo del Fredholm si complica, per la presenza dei poli della D e anche per la difficoltà di sviluppare questa funzione nella prossimità dei punti β_1, β_2, radici dell'equazione

$$(5)\qquad \left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1=0.$$

Prendiamo il caso del Volterra; un residuo allora non può provenire che dalle radici β_1, β_2, e la D si sviluppa facilmente. Sia $x>0$, e

$$(6)\qquad \beta_1=-\frac{yz+ir}{x^2+y^2}\,,\quad \frac{\beta_1 y+z}{x}=\frac{xz+iyr}{x^2+y^2}\,,$$
$$r^2=x^2+y^2+z^2;$$

abbiamo:

$$\left(\frac{\beta_1 y + z}{x}\right)^2 + \beta^2 + 1 = \frac{2ir}{x}(\beta - \beta_1) \tag{7}$$

nella prossimità di β_1. Denotiamo con A l'operazione

$$A\chi(t) = \int \left[\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^2 f(t, \xi) + \beta^2 \varphi(t, \xi) + \psi(t, \xi) \right] \chi(\xi)\, d\xi ,$$

e sia R il polinomio (5); facendo uso delle potenze simboliche, troviamo:

$$x(t) = \mu(t) - \frac{A\mu(t)}{R} + \frac{A^2\mu(t)}{R^2} - \cdots ,$$

onde

$$D = \varepsilon(t, \tau) - \frac{\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^2 f(t, \tau) + \beta^2 \varphi(t, \tau) + \psi(t, \tau)}{R} \tag{8}$$

$$+ \frac{A\left[\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^2 f + \beta^2 \varphi + \psi\right]}{R^2} - \cdots ,$$

serie uniformemente convergente, i cui termini si integrano separatamente. Nell'integrale (IV) abbiamo prima il termine

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(t, \tau)\,\alpha\beta}{2ir(\beta - \beta_1)} = -\frac{\varepsilon(t, \tau)}{4\pi r} , \tag{9}$$

integrando attorno al mezzopiano superiore della variabile complessa β.

I termini d'ordine superiore conterranno integrali della forma:

$$J_{h,k,l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^{2h} \beta^{2k}\, d\beta}{R^{h+k+l+1}} ,$$

il cui calcolo non è difficile; si dimostra che:

$$J_{h,k,l} = \frac{1}{(2(h + k + l))!} \frac{\partial^{2(h+k+l)}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} r^{2(h+k+l)-1} . \tag{10}$$

Per verificare questa relazione in modo rapido, se non rigoroso, osserviamo che:

$$J_{h,k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^{2h}\beta^{2k}\gamma^{2l}\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{h+k+l+1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$= \frac{\partial^{2(h+k+l)}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} \cdot \frac{(-1)^{h+k+l}}{2\pi} \cdot \iiint \frac{e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{h+k+l+1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$= \frac{\partial^{2(h+k+l)}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} \cdot K ,$$

ove

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{h+k+l} \mathrm{K}=\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{e^{(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma=-\frac{4\pi^2}{r}.$$

Risolvendo questa ultima equazione, ritroviamo la (10).

7. Le formule del paragrafo precedente contengono la soluzione fondamentale del Volterra. Abbiamo costruita la serie seguente:

$$\text{(V)}\qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon(t\,,\tau)}{r}+\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m}\, r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\,\mathrm{F}_{h,k,l}(t\,,\tau)\right),$$

ove le funzioni $\mathrm{F}_{h,k,l}$ sono date dalle relazioni

$$\mathrm{F}_{h,k,l}(t\,,\tau)=\int\left[f(t\,,\xi)\,\mathrm{F}_{h-1,k,l}(\xi\,,\tau)+\varphi(t\,,\xi)\,\mathrm{F}_{h,k-1,l}(\xi\,,\tau)+\right.$$
$$\left.+\,\psi(t\,,\xi)\,\mathrm{F}_{h,k,l-1}(\xi\,,\tau)\right]d\xi\,,$$

$$\mathrm{F}_{1,0,0}=f\quad;\quad \mathrm{F}_{0,1,0}=\varphi\quad;\quad \mathrm{F}_{0,0,1}=\psi\,.$$

Ora, per l'applicazione alla (I) del metodo del Green, invece di partire dalla definizione del § 2, è naturale di cercare una soluzione che per $f=\varphi=\psi=0$ si riduce alla funzione $\frac{1}{r}$. Sarà essa una soluzione che si deduce dalla (V) integrando rispetto a τ.

Prendiamo l'equazione aggiunta del Volterra, in cui si integra fra t e θ; scrivendo, secondo le notazioni della Memoria citata, $f(\tau\,,t)\,,\mathrm{F}_{h,k,l}(\tau\,,t)$, invece di $f(t\,,\tau)\,,\mathrm{F}_{h,k,l}(t\,,\tau)$, poniamo:

$$\mathrm{V}(x\,,y\,,z\,|\,t\,,\theta)=-4\pi\int_t^\theta \mathrm{F}(x\,,y\,,z\,|\,t\,,\tau)\,d\tau\,,$$

e allora ritroviamo la *soluzione fondamentale* del Volterra, cioè la serie

$$\mathrm{V}=\frac{1}{r}\left(1+r\int_t^\theta \frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum\frac{\partial^{2m}\,r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\cdot \mathrm{F}_{h,k,l}(\tau\,,t)\,d\tau\right).$$

8. Finiamo col ricordare l'applicazione del metodo dei nn. 2 e 3 a un caso più generale di equazioni integro-differenziali. Sia l'equazione

$$\text{(VI)}\qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right)u(t)+\int \Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\,;t\,,\tau\right)u(\tau)\,d\tau=$$
$$=\mathrm{A}u=\varrho(x\,,y\,,z\,;t)\,,$$

ove con f e Φ denotiamo funzioni intere e razionali d'ordine qualunque dei simboli di derivazione, essendo f a coefficienti costanti e Φ a coefficienti che dipendono da t e τ. Ritenendo la definizione del § 2, l'integrale fondamentale della (VI) si forma facilmente. Consideriamo l'equazione integrale

$$x(t) + \frac{1}{f(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma)}\int \Phi(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma\,;t\,,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \mu(t) = \frac{\varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu\,;t)}{8\pi^3 f(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma)}$$

e sia $D(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,|\,t\,,\tau)$ la funzione risolvente analoga alla D dell'equazione (2); l'integrale fondamentale della (VI) sarà

$$\text{(VII)}\qquad F = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,|\,t\,,\tau)}{f(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma))}\,e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,,$$

integrale che si saprebbe discutere cogli argomenti sviluppati nei diversi casi di equazioni differenziali.

9. La proprietà fondamentale dell'integrale (VII) può verificarsi più o meno direttamente. Trattandosi della formula del Green, conviene occuparsi delle derivate d'ordine $n-1$. Ricordiamo un teorema della teoria delle equazioni differenziali (¹). Sia

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$$

un'equazione lineare, omogenea d'ordine n, a coefficienti costanti, a caratteristica imaginaria; e sia

$$F_{n-1} = \psi_{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

una combinazione lineare delle derivate d'ordine $n-1$ dell'integrale fondamentale F corrispondente. Consideriamo l'integrale

$$J_\sigma = \int_\sigma \varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu)\,F_{n-1}(x-\lambda\,,y-\mu\,,z-\nu)\,d\sigma\,,$$

esteso a una superficie σ qualunque. Siano $\xi\,,\eta\,,\zeta$ i coseni direttori della normale (presa in un senso determinato) in un punto $\lambda=\bar{x}\,,\mu=\bar{y}\,,\nu=\bar{z}$ della σ; allora attraversando la σ in modo che il punto $x\,,y\,,z$ passante per $\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z}$, vada nella direzione secondo la quale cresce il trinomio

$$\xi x + \eta y + \zeta z\,,$$

si trova che J_σ è discontinua, *i suoi valori alle due faccie di σ presentando la differenza finita*

$$-\frac{\psi_{n-1}(\xi\,,\eta\,,\zeta)}{f(\xi\,,\eta\,,\zeta)}\cdot\varrho(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z})\,.$$

(¹) Vedi Zeilon, *Sur les dérivées d'ordre* $n-1$ *de l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique.* Arkiv f. Matematik ecc., Stocolma 1913.

Nel caso presente, un risultato analogo si deduce cogli stessi ragionamenti della Memoria citata. Supponiamo che F_{n-1} contenga le derivate di ordine $n-1$ rispetto a x, y, z della funzione (VII) nel caso di un'equazione (VI) omogenea; troviamo che l'integrale

$$\text{(11)} \qquad J_\sigma = \int_\sigma \int_\tau \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, F_{n-1}(x-\lambda, y-\mu, z-\nu \,|\, t, \tau)\, d\sigma\, d\tau$$

presenta fra le due faccie di σ la discontinuità

$$\text{(12)} \qquad \varDelta_\psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; t) = \varDelta_\psi(t) =$$

$$= -\frac{\psi_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)}{f(\xi, \eta, \zeta)} \int_\tau D(\xi, \eta, \zeta \,|\, t, \tau)\, \varrho(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \tau)\, d\tau = -\frac{\psi_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)}{f(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \varDelta(t),$$

ove $\varDelta(t)$, la quale non dipende dai coefficienti della ψ, si trova, secondo la definizione di D, mediante l'equazione integrale

$$\text{(13)} \qquad \varDelta(t) + \frac{1}{f(\xi, \eta, \zeta)} \int \Phi(\xi, \eta, \zeta; t, \tau)\, \varDelta(\tau)\, d\tau = \varrho(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; t),$$

osservando che f e Φ sono adesso omogenee dello stesso ordine.

Abbiamo supposto l'equazione (VI) omogenea e a caratteristica non reale, cioè che la funzione $f(\alpha, \beta, \gamma)$ non si annulli mai nel campo reale; ma si può estendere il risultato in modo da renderlo valido anche in casi più generali.

Come esempio consideriamo la funzione $V(x, y, z \,|\, t, \theta)$ del Volterra; prendendo $\varrho(x, y, z; t) = -4\pi$, avremo da studiare gli integrali

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial x}\, d\sigma, \quad \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial y}\, d\sigma, \quad \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial z}\, d\sigma;$$

ne troviamo le discontinuità

$$\frac{-\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \cdot \varDelta, \quad \frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \cdot \varDelta, \quad \frac{-\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \cdot \varDelta,$$

ove

$$\text{(14)} \qquad \varDelta(t) + \frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \int_t^\theta [\xi^2 f + \eta^2 \varphi + \zeta^2 \psi]\, \varDelta(\tau)\, d\tau = -4\pi.$$

Nella formula del Green, per l'equazione (I) occorre l'integrale

$$\text{(15)} \qquad \int_\sigma \Bigg[\frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\theta d\tau \Bigg(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} \cdot f(\tau, t) \cdot \xi + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\, \varphi(\tau, t) \cdot \eta + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\, \psi(\tau, t) \cdot \zeta \Bigg) \Bigg] d\sigma,$$

la cui singolarità si calcola per conseguenza, $= 4\pi$.

Sia la σ una superficie *chiusa*; la direzione che conviene scegliere per il passaggio attraverso σ sarà quella della normale *esterna*. Ora, per un *punto* xyz, *esterno* rispetto a σ, si prova facilmente che l'integrale (15) è zero; se ne conclude che a un *punto interno* corrisponde il valore -4π. Ritroviamo così un risultato fondamentale nella teoria dell'equazione (I) [1].

Ricordiamo, finalmente, che il metodo precedente si applica alle equazioni integro-differenziali a un numero qualunque di variabili, e che anche il simbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ potrebbe intervenire nella f senza gravi complicazioni.

Matematica. — *Il teorema di Eulero per le funzioni di linea omogenee.* Nota della dott.ssa ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche.* Nota di S. ZAREMBA, presentata dal Socio E. LEVI-CIVITA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla resistenza elettrica di una lamina in un campo magnetico.* Nota di O. M. CORBINO e G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In un precedente lavoro fu notato che la presenza di larghi elettrodi di rame, applicati al contorno di una lamina di metallo che rappresenti il fenomeno di Hall, deve dare origine ad un sistema di correnti interne, le quali, sovrapponendosi alla corrente primitiva, aumenteranno l'energia consumata, per l'effetto Joule, nella lamina. Ne risulterà un aumento della resistenza globale della lamina definita come il rapporto tra la differenza dei potenziali degli elettrodi e la corrente totale che traversa il circuito. Questo aumento è indipendente da quello dovuto alla variazione di resistenza specifica, quale si otterrebbe nel caso in cui le linee di corrente conservessero la forma primitiva; indipendente cioè dallo aumento di cui la teoria elettronica di Riecke e di Drude non rende conto, e che viene utilizzato nella spirale di Lenard per la misura dei campi magnetici.

[1] Vedi Volterra, Memoria precedentemente citata.