# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXIV.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 2 maggio 1915.*

P. Blaserna, Presidente.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann.* Nota I del Corrispondente Francesco Severi.

Nel 1901 l'Accademia danese delle Scienze, per iniziativa dello Zeuthen, pose a concorso la questione di ricercare se in ogni famiglia di curve algebriche gobbe, possano esistere forme limiti composte da rette. L'Accademia, nel proporre il tema, aveva di mira soprattutto i problemi numerativi, inerenti alle curve algebriche. Si trattava di dare una base sicura e rigorosa alle formole che erano state ottenute da varî Autori, con spezzamenti delle curve algebriche in curve di ordini inferiori o in rette.

Ma la risoluzione del problema proposto — come del resto accennava l'Accademia danese — avrebbe avuto una portata ben maggiore, giacchè, una volta ottenuta una risposta affermativa alla questione, si sarebbe potuto tentare di ricavarne una classificazione grandemente suggestiva delle curve gobbe, assegnando, come rappresentante tipico di ciascuna famiglia, un sistema *connesso* di rette.

La questione rimase però sinora senza risposta [1]. Di essa io intendo occuparmi nel presente lavoro, ove considero il problema anche in relazione

[1] Tranne che per le curve di genere $p \leq 2$. Vedasi Brill, *Ueber algebraische Raumkurven* (Math. Annalen, 64, 1907), pag. 322.

alle curve iperspaziali. In questa Nota e nella successiva, riassumo i risultati da me ottenuti in proposito, riserbandomi di tornarvi in seguito, con una Memoria più ampia. Tuttavia do fin d'ora notizia non soltanto dei risultati, ma anche dei procedimenti dimostrativi, per ciascun dei quali indico le argomentazioni essenziali.

Dimostro anzitutto che, per $n \geq p + r$, le $C_p^n$ (d'ordine $n$ e genere $p$) di $S_r$, formano *una sola famiglia* (varietà algebrica irriducibile) *di dimensione regolare* $\nu = n(r+1) - (p-1)(r-3)$ ([2]). La curva generica di questa famiglia, è non speciale, e la famiglia stessa dicesi perciò *non speciale*. Anche per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$, le $C_p^n$ formano in $S_r$ una sola famiglia regolare, ma la curva generica è in tal caso speciale e normale.

Questi teoremi son fondati essenzialmente sul fatto che la varietà algebrica delle curve piane irriducibili d'ordine $n$ e genere $p$, è irriducibile ([3]).

Definito poi che cosa deve intendersi per *n-latero (connesso) di genere virtuale (o effettivo)* $p (\geq 0)$, ne deduco, mediante semplici considerazioni proiettive, che, dato in $S_r (r \geq 2)$ un $n$-latero L di genere effettivo $p \geq 0$, esistono sempre curve razionali (irriducibili) d'ordine $n$, infinitamente vicine ad L.

Ciò mi permette di concludere che alla varietà V delle curve piane irriducibili $C_p^n$, appartiene ogni $n$-latero piano; e da questo, mediante una delicata analisi topologica, *deduco quali sono tutti i possibili spezzamenti delle curve di* V.

Una conseguenza notevolissima delle considerazioni svolte è *il teorema d'esistenza delle funzioni algebriche d'una variabile, che viene così stabilito con mezzi semplici e luminosi, di carattere algebrico-geometrico, i quali son di certo più appropriati alla natura algebrica della questione, di quanto non lo sieno gli strumenti finora usati per la dimostrazione classica del teorema di Riemann* (funzioni armoniche e problema di Dirichlet) ([4]). E quando parlo del teorema di esistenza, intendo alludere non soltanto all'arbitrarietà nella scelta dei $2n + 2p - 2$ punti di diramazione della funzione algebrica ad $n$ rami, di genere $p$, che si vuol costruire, ma anche alla possibilità di assegnare ad arbitrio le sostituzioni fra gli $n$ rami, attorno ai singoli punti di diramazione.

([2]) Per $r = 3$ il risultato trovasi in Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (premiata col premio Steiner 1882) (Journal de l'École polyt., 52, 1882). Ma l'A., non avendo precisato sufficientemente il concetto di « famiglia di curve gobbe », non si ferma a dimostrare che le $C_p^n$ di $S_3$, per $n \geq p + 3$, costituiscono una sola varietà algebrica *irriducibile*.

([3]) Cfr. Enriques, *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche*, ecc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 47, 1912), n. 1.

([4]) Ved. ad es. Picard, *Traité d'analyse* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, 2ème éd.), tom. II, chap. XVI.

Continuando (Nota II) lo studio delle curve di $S_r (r \geq 3)$, distinguo i punti doppî che possono acquistare particolari curve *di una data famiglia* V, in *proprî* ed *improprî*, secondo che abbassano o no il genere delle curve della famiglia che li acquistano ([5]). I primi importano lo spezzamento della sviluppabile osculatrice alla curva che li acquista, ma non lo spezzamento della congruenza delle corde; mentre per gli altri accade il contrario.

Nel n. 6 (Nota II) sono finalmente in grado di dimostrare che *ogni famiglia non speciale di* $C_p^n$ $(n \geq p + r)$ *possiede curve limiti così costituite: un* $(n - p)$*-latero connesso attraverso ad* $n - p - 1$ *nodi, insieme a* $p$ *corde generiche di questo.*

Stabilisco quindi, nel n. 8, *l'esistenza di infiniti* $n$*-lateri di genere* $p$, *in ogni famiglia, anche speciale, di curve irriducibili* $C_p^n$ *di* $S_r$, rispondendo così alla questione posta dall'Accademia danese.

Cammin facendo, mi si offre il destro di contare in modo rigoroso l'infinità delle $g_n^r$ speciali, esistenti sopra una curva di dato genere $p$, a moduli generali (n. 3). Questo computo veniva fatto, con Brill e Noether ([6]), ammettendo implicitamente un postulato.

Alla questione di decidere se un dato $n$-latero connesso di genere effettivo $p$, appartenente ad $S_r$, si possa sempre considerare come il rappresentante tipico d'una famiglia di curve irriducibili di $S_r$, rispondo in modo affermativo nel n. 9. Ma il risultato non è ancora così espressivo come avrei desiderato, perchè può darsi che la famiglia definita sia di genere $q < p$. A proposito delle condizioni complementari cui deve sottoporsi un $n$-latero di genere effettivo $p$, perchè esso definisca una famiglia di curve, senza punti doppî, di genere esattamente uguale a $p$, mi sono limitato a riferire le mie induzioni e ad indicare i mezzi per giungere al risultato definitivo, che spero di poter dimostrare in seguito ([7]).

([5]) Questa distinzione mi è già stata molto utile nella Nota, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli* (Questi Rendiconti, 23, 1914), pag. 527.

([6]) Brill Noether, *Ueber die algebraischen Funktionen*, ecc. (Math. Annalen, 7, 1873), §§ 9-12; Noether, *Zur Graudlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (premiata col premio Steiner 1882) (Berlin. Abh. 1882), pag. 18. Ved. pure Picard, op. cit., pag. 570.

([7]) Avrei potuto rinviare a più tardi la pubblicazione del presente lavoro, in modo da inserirvi anche la dimostrazione di questo risultato, se non avessi creduto che la situazione politica che si va maturando pel nostro Paese, non consentirà fra breve a molti di noi di poter attendere con tranquillità alla ricerca scientifica. Avendo comunicato al sig. Zeuthen, nel marzo scorso, i risultati delle mie ricerche, ne ebbi l'incitamento a pubblicarle subito. Lo Zeuthen anzi, in risposta alla mia comunicazione, mi scriveva in data 29 marzo 1915: « Je crois avoir aussi de mon côté trouvé le moyen de démontrer l'existence des courbes dégénérées... mais mes recherches sont encore loin d'être achevées ».

Termino la Nota II indicando i varî problemi a cui portan nuova luce i risultati precedenti (questioni di postulazione, problemi numerativi, questioni di realità delle curve algebriche). Quanto ai problemi numerativi, la conclusione è, come si prevedeva, che le formole ottenute mediante gli spezzamenti delle curve, non soffrono eccezioni o limitazioni.

1. Preliminari. — Parlando di *famiglia* di curve di dato ordine $n$ in $S_r$, intendiamo di alludere, con Noether, ad una varietà algebrica V di curve, *irriducibile*, come insieme de' suoi elementi (curve) e *completa*, cioè che non sia contenuta in una più ampia di curve dello stesso ordine. Una *sottofamiglia* è una varietà irriducibile V′ di curve d'ordine $n$, *completa relativamente* ad un'assegnata proprietà delle sue curve.

Due famiglie di curve dello stesso ordine hanno generalmente in comune una o più sottofamiglie.

Dalla definizione di famiglia di curve, segue subito che *ogni sistema continuo, cui appartenga una curva scelta genericamente entro una famiglia* V, *giace interamente in* V.

2. Irriducibilità della varietà di tutte le curve irriducibili di dato genere $p$ e della varietà di tutte le curve piane irriducibili di ordine $n$ con $d=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p$ punti doppî. — Le curve piane di ordine $n$, con $d$ punti doppî, formano una varietà $\Sigma$ di dimensione $3n+p-1$, alla quale appartiene la varietà V delle curve *irriducibili* di ordine $n$ e genere $p$. Oltre a questa, vi sono d'ordinario in $\Sigma$ altre varietà $\infty^{3n+p-1}$, di curve spezzate, con $d$ punti doppî; ma quel che importa di osservare è che *la varietà* V, *di dimensione* $3n+p-1$, *è irriducibile*. Questo fatto, come ho detto, è già stato segnalato da Enriques, il quale, trattando incidentalmente la questione, si è limitato ad esporre le linee essenziali del procedimento dimostrativo, che io mi propongo di sviluppare più ampiamente nella Memoria cui queste Note preludono.

La semplice dimostrazione di Enriques, è strettamente geometrica. Da essa segue subito che *le curve di dato genere* $p$, *formano una varietà algebrica* H *irriducibile* (avente per elementi le classi di curve di genere $p$ birazionalmente identiche).

A questo medesimo risultato si perviene d'altronde facilmente poggiandosi sul teorema d'esistenza di Riemann ([8]). Basta all'uopo osservare: che ogni curva di genere $p$, può rappresentarsi sulla retta (sfera complessa) $n$-pla, con $2n+2p-2$ punti di diramazione *semplici*, sempre che sia p. es. $n>2p$; che ordinati i cappî (o le sostituzioni) inerenti ai singoli

([8]) La cosa trovasi già accennata in Klein, *Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen* (Leipzig, 1882), pag. 66; oppure, *Riemannsche Flächen* (Autogr. Vorlesungen, Göttingen, 1894), I, pag. 117.

punti di diramazione, alla maniera di Lüroth-Clebsch, ne segue subito la possibilità di far circolare il gruppo di diramazione, a partire da una posizione iniziale e ritornandovi, per guisa da scambiare tra loro due diverse distribuzioni delle sostituzioni stesse. Le superficie di Riemann, birazionalmente distinte, costruite a partire da un dato gruppo di diramazione, si possono quindi, per una conveniente circolazione del gruppo, scambiare fra loro. E da ciò segue l'asserita irriducibilità di H.

Ritengo probabile che la varietà H sia razionale o quanto meno che sia riferibile ad un'involuzione di gruppi di punti in uno spazio lineare $S_{3p-3}$; o, in altri termini, che *nell'equazione di una curva piana di genere* $p$ (*e p. es. dell'ordine* $p+1$) *i moduli si possano far comparire razionalmente.* La considerazione delle curve piane minime di dato genere $p$, mostra agevolmente che questo fatto è vero per $p \leq 11$ (per $p = 0, 1$ si vede anzi subito che la varietà H è addirittura razionale); la considerazione delle curve sghembe minime di genere $p$, definite come intersezioni parziali di superficie, permette di salire ad ulteriori valori di $p$; ecc.

3. Curve canoniche. Valutazione rigorosa dell'infinità delle serie lineari $g_n^r$ sopra una curva di dato genere, a moduli generali. — La valutazione dell'infinità $d$ delle $g_n^r$ non speciali, sopra una curva di genere $p$, si fa notoriamente, in modo completo, colla massima facilità (9), e si trova:

$$(1) \qquad d = (r+1)(n-r) - rp\,.$$

Si vede anche subito che, sopra una data curva di genere $p$, le $g_n^r$ *non speciali formano una varietà irriducibile* (che è l'insieme delle coppie di elementi d'una varietà di Jacobi del genere $p$ e della varietà degli $S_r$, appartenenti ad un $S_{n-p}$).

Quanto alla valutazione dell'infinità $d$ delle $g_n^r$ speciali, la cosa è assai più delicata. Brill e Noether ragionano in un modo che è sostanzialmente equivalente a questo: Sopra la curva canonica $\Gamma$ di $S_{p-1}$, i gruppi $G_n$ speciali, individuanti serie complete di dimensione $r$, sono staccati su $\Gamma$ da spazî $S_{n-r-1}$. Ora, poichè per un $S_{n-r-1}$ di $S_{p-1}$ l'appoggiarsi ad una data curva è condizione $(p-n+r-1)$-pla, gli $S_{n-r-1}$ $n$-secanti di $\Gamma$, dipenderanno *generalmente* da

$$(2) \qquad (n-r)(p-n+r) - n(p-n+r-1) = n - r(p-n+r)$$

parametri; e siccome gli spazî stessi si distribuiscono in sistemi $\infty^r$, cor-

(9) Ved. per es. le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 197. Di queste *Lezioni* era quasi pronta una traduzione tedesca ampliata (edita da Teubner), quando scoppiò la guerra europea. Ora è tutto sospeso.

rispondenti ciascuno ad una $g_n^r$ completa, $d$ risulterà anche in tal caso espresso da (1) ([10]).

Ma tutto ciò è subordinato all'ipotesi che le condizioni contate siano fra di loro indipendenti; e quest'indipendenza non può affatto *a priori* giustificarsi colla *generalità* dei moduli di $\boldsymbol{\Gamma}$. Per completare in questo punto delicato la valutazione dell'infinità $d$, io procedo così: Le curve canoniche $\boldsymbol{\Gamma}$, in virtù di quanto s'è detto al n. 2, formano nello $S_{p-1}$ una sola famiglia, dipendente da $k=(p-1)(p+4)$ parametri. Entro questa famiglia vi sono $\infty^{k-1}$ curve irriducibili $\boldsymbol{\Gamma}_0$, di genere $p-1$, con un punto doppio, costituenti una sola sottofamiglia, giacchè ognuna delle $\boldsymbol{\Gamma}_0$ è imagine proiettiva della serie staccata sopra una curva piana d'ordine $p+1$, con $\frac{1}{2}p(p-3)+1$ punti doppî, dalle curve d'ordine $p-2$ passanti per $\frac{1}{2}p(p-3)$ di questi punti. Una $\boldsymbol{\Gamma}_0$ si proietta dal suo punto doppio, sopra un $S_{p-2}$, secondo una curva canonica del genere $p-1$. Viceversa, ogni tal curva canonica può considerarsi come proiezione di una (anzi di infinite) $\boldsymbol{\Gamma}_0$.

Supposto dimostrata la formola (1) pel genere $p-1$, si assuma una $\boldsymbol{\Gamma}_0$ a moduli generali, col punto doppio O, e si contino i suoi spazî plurisecanti, desumendoli da quelli di una curva canonica del genere $p-1$, e tenendo conto che, quando una $\boldsymbol{\Gamma}$ va in $\boldsymbol{\Gamma}_0$, la varietà delle corde di $\boldsymbol{\Gamma}$ ha per limite la varietà delle corde di $\boldsymbol{\Gamma}_0$ (perchè O è un punto doppio proprio, ved. n. 5), e che inoltre le sole corde improprie di $\boldsymbol{\Gamma}_0$, sono le sue tangenti e le rette del fascio individuato dalle due tangenti in O.

Così ad es. la curva canonica $\boldsymbol{\Gamma}^8$ del genere 5 (in $S_4$) non può avere alcuna trisecante, perchè il gruppo $G_3$ relativo, individuerebbe una $g_3^1$, cioè $\boldsymbol{\Gamma}$ possiederebbe infinite trisecanti, e quando $\boldsymbol{\Gamma}$ tendesse verso una $\boldsymbol{\Gamma}_0$ generica col punto doppio O, si avrebbero, come limiti delle $\infty^1$ trisecanti di $\boldsymbol{\Gamma}$, $\infty^1$ trisecanti *effettive* di $\boldsymbol{\Gamma}_0$ e per un punto generico M di $\boldsymbol{\Gamma}_0$ ne passerebbe un numero finito. Facendo avvicinare M ad O, se ne trarrebbe che la più generale curva canonica del genere 4 (in $S_3$) possiede punti doppî. Similmente $\boldsymbol{\Gamma}$ non può possedere più che $\infty^2$ piani quadrisecanti, perchè altrimenti la curva canonica del genere 4 possiederebbe più che $\infty^1$ trisecanti, ecc. ([11]).

([10]) Se i moduli son generali, l'ordine e la dimensione di una $g_n^r$ speciale completa, soddisfaranno quindi alla $d \geq 0$, la quale, introducendo l'indice di specialità $i=p-n+r$ della $g_n^r$, può scriversi sotto la forma $n \geq (i+1)r$. Si ha così *un'estensione del teorema di Clifford, valida sulle curve a moduli generali*. A quali condizioni particolari deve soddisfare la curva, perchè una $g_n^r$ speciale completa abbia $n<(i+1)r$? Per $i=2$, $n<p-1$, il Comessatti ha trovato che la $g_n^r$ deve essere composta con una $\gamma_2^1$.

([11]) Naturalmente, nel caso speciale della $\Gamma_5^8$, tutto ciò deriva anche dal fatto ch'essa è completa intersezione di 3 quadriche.

In tal modo dunque si verificherà, in generale, che $\Gamma_0$ non possiede più spazî $n$-secanti di quanti son dati dalla (2), e ne seguirà la validità della (1) per qualunque $p$.

Quanto alle $g_n^r$ speciali incomplete, la loro infinità è minore di (1); cosicchè la loro aggiunta non altera l'infinità $d$ delle $g_n^r$ contenute in $\Gamma$. Se ne trae subito, come hanno fatto Brill e Noether per $r=3$, che *le curve irriducibili* $C_p^n$ *dello* $S_r$, *quando* $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$, *dipendono da*

$$\nu = n(r+1) - (p-1)(r-3), \tag{3}$$

*costanti.*

Per $n \geq p + r$ $(r \geq 2)$ un generico gruppo di $n$ punti sopra una $\Gamma_p$ (a moduli anche particolari) è non speciale, e individua pertanto una $g_n^{n-p}$ di dimensione $n - p \geq r$, cosicchè le $C_p^n$ di $S_r$, birazionalmente identiche a $\Gamma_p$, formano una varietà irriducibile di curve generalmente non speciali. Se ne deduce (n. 2) che:

*Per* $n \geq p + r$, *le curve* $C_p^n$ *di* $S_r$ $(r \geq 2)$ *formano una sola famiglia di dimensione* (3), *la cui curva generica è non speciale* (*e normale in* $S_{n-p}$).

Una tale famiglia si chiamerà una *famiglia non speciale* di curve di $S_r$.

Per $r + \frac{r}{r+1} p \leq n < p + r$ $(r \geq 2)$, sopra $\Gamma_p$ ogni $g_n^r$ è speciale ed è generalmente completa. In tal caso però la varietà delle $g_n^r$ su $\Gamma_p$ *non è sempre irriducibile* ([12]). Comunque, un procedimento analogo a quello già accennato (passaggio dal genere $p-1$ al genere $p$), mostra che, facendo circolare $\Gamma_p$ nella propria famiglia, si riesce a scambiare fra loro le diverse parti della suddetta varietà. Si può dunque anche in tal caso affermare che:

*Per* $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$ *le* $C_p^n$ *di* $S_r$ *formano una sola famiglia, di dimensione* (3), *la cui curva generica è speciale e normale.*

4. Sistemi connessi di rette. Dimostrazione geometrica del teorema di esistenza di Riemann. — Un sistema *connesso* di $n$ rette con $n + p - 1$ $(p \geq 0)$ intersezioni *semplici* (nodi), si chiamerà brevemente un *$n$-latero di genere effettivo $p$*. Gli $n + p - 1$ nodi si considerano come punti in cui si può passare da un lato (ramo) all'altro; si riguardano cioè piuttosto come « punti di diramazione » che come punti doppî. Si dice perciò che essi si considerano come *virtualmente inesistenti*, rispetto alle loro qualità di punti doppî, che non permetterebbe il salto da un ramo all'altro.

Se dei suddetti nodi effettivi, se ne possono considerare come inesistenti soltanto $n + q - 1$ $(q < p)$, *senza che per questo lo $n$-latero divenga*

([12]) Si pensi p. es. alle due $g_3^1$ distinte esistenti sopra la curva canonica del genere 4.

*sconnesso*, si dirà che $q$ è il *genere virtuale* dello $n$-latero, in quanto si considerino come *assegnati* i $p - q$ nodi rimanenti.

Abbiasi un $n$-latero di genere effettivo o virtuale $p > 0$. Se assegnando uno de' suoi nodi, che prima si consideravano inesistenti, si rompe la connessione, lo $n$-latero non potrà scindersi che in *due* soli pezzi connessi. Se ne deduce facilmente che « si posson sempre scegliere $p$ nodi convenienti, « fra quelli che prima stabilivano la connessione, per guisa da ottenere, « assegnandoli, un $n$-latero (si sottintende connesso) di genere virtuale zero ».

Ciò posto, mediante elementari considerazioni geometriche, si prova, col processo d'induzione, che « un $n$-latero di genere effettivo $p \geq 0$, appar- « tenente ad $S_r$ $(r \geq 2)$, è sempre proiezione di un $n$-latero di genere « effettivo zero, appartenente ad $S_n$ ».

La generazione proiettiva delle curve razionali normali mediante stelle omografiche, permette inoltre di provare agevolmente, sempre per induzione, che « esistono curve razionali (irriducibili) di ordine $n$, infinitamente vicine « ad un $n$-latero di genere effettivo zero, dato in $S_n$ ». Donde poi, a cagione della proposizione precedente, segue che *esiste sempre qualche curva razionale (irriducibile) d'ordine $n$, infinitamente vicina ad un n-latero* L, *di genere effettivo $p \geq 0$, dato in $S_r$*.

Un nodo P di L può essere di tre specie, rispetto ad una curva razionale C, infinitamente vicina ad L:

*a*) P può essere un « punto di diramazione », per guisa che i due lati incrociantisi in P, sieno sostituiti in C da *un sol ramo*. Di tali punti ne esistono $n - 1$ e possono essere scelti *a priori*, purchè sufficienti a stabilire la connessione;

*b*) oppure P può essere infinitamente vicino ad un nodo di C;

*c*) o infine i due rami incrociantisi in P possono essere sostituiti in C da *due* rami, colle origini distinte, ma infinitamente prossime a P.

I punti di *una* delle ultime due specie possono anche mancare; mancano simultaneamente solo quando $p = 0$.

Consideriamo, in particolare, il caso di $r = 2$. Assegnando allora $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ degli $\frac{n(n-1)}{2}$ nodi dello $n$-latero piano L (sempre però in modo che gli $n - 1$ punti residui bastino a stabilire la connessione), si avranno curve razionali infinitamente vicine ad L e cogli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppî infinitamente prossimi ai prefissati. Vuol dire che alla varietà (irriducibile, n. 2) delle curve piane razionali d'ordine $n$, appartengono tutti i possibili $n$-lateri piani: il che si sarebbe potuto stabilire anche usufruendo della rappresentazione parametrica. E poichè la varietà di tutte le curve piane irriducibili d'ordine $n$ con $d$ punti doppî, contiene la varietà delle curve con $d+1$, $d+2$, ..., punti doppî, così si conclude che:

*La varietà delle curve piane irriducibili d'ordine n con*

$$d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

*punti doppî, contiene tutti i possibili n-lateri piani.*

Un'altra conseguenza notevole, la quale del resto potrebbe dimostrarsi anche profittando del teorema riemanniano d'esistenza, è la seguente:

*Avendosi un n-latero piano* L, *si assegnino* $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *dei suoi punti doppî, per modo che coi rimanenti* $\frac{n(n-1)}{2} - d$ *nodi si possa stabilire la connessione fra gli n lati. Esiste allora sempre qualche curva irriducibile d'ordine n, infinitamente vicina ad* L, *la quale possiede d, e soltanto d, nodi, infinitamente vicini agli assegnati.*

Ecco la semplice dimostrazione geometrica di questo teorema.

Posto $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, fra gli $n + p - 1$ nodi, che si vogliono considerare inesistenti, se ne potranno assegnare $p$, in modo che lo $n$-latero resti connesso (e di genere virtuale zero). Dopo ciò si potrà costruire una curva razionale D, infinitamente vicina ad L, e con $p + d$ nodi infinitamente vicini ad altrettanti vertici di L, tra i quali vi sono i $d$ primitivamente assegnati.

Nella varietà V delle curve piane irriducibili $C^n_p$ esistono dunque curve infinitamente vicine ad L, e coi $d$ nodi infinitamente vicini agli assegnati: p. es. la curva D. Queste curve non possono tutte in conseguenza avere $d + 1$ (o più) punti doppî, perchè entro V gli elementi (curve), infinitamente vicini ad un elemento dato (L), son più numerosi che gli elementi infinitamente vicini ad L, entro una varietà subordinata a V, qual'è quella delle curve irriducibili d'ordine $n$ con $d + 1$ nodi.

Dal teorema precedente segue quest'altro:

*Alla famiglia* V *delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, appartiene ogni curva composta da una curva irriducibile di ordine* $n-1$ *e genere* $p-1$ *e da una retta.*

Prese infatti $n$ rette generiche $a_1, a_2, \ldots, a_n$ del piano, si « assegnino » $d - n + 3 \left( d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p \right)$ vertici dello $(n-1)$-latero $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, per guisa che esso resti connesso, e si chiami K la curva d'ordine $n-1$ e genere virtuale $p-1$, così ottenuta. Aggiungendo a K la retta $a_n$, se si assegnano gli $n-1$ punti ove $a_n$ sega K, si ottiene una curva *sconnessa* $D_0$, d'ordine $n$ e di genere virtuale $p-2$; se invece si assegnano soltanto $n-3$ delle suddette intersezioni, e si considerano come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva *connessa* $C_0$ d'ordine $n$ e di genere virtuale $p$. Ora, pel teorema precedente, vi sono curve irriducibili di V, infinitamente vicine a $C_0$ e *coi $d$ nodi infinitamente prossimi agli assegnati*; e poichè esistono $\infty^h$ $(h = 3n + p - 3)$ curve di V passanti per P, Q, e tra esse v'è $C_0$, così esisteranno $\infty^{h-1}$ curve di V, passanti per P, Q, infinitamente prossime a $C_0$ e coi $d$ nodi infinitamente vicini agli assegnati. Ciascuna di queste curve, in quanto passa per P, Q ed è infinitamente vicina a $C_0$, ha un nodo infinitamente prossimo a ciascuno dei punti P, Q ([13]), sicchè è una curva infinitamente prossima alla $D_0$, coi suoi $d + 2$ punti doppî assegnati. Ne consegue che $D_0$ appartiene a V, e precisamente alla totalità $\Sigma$ delle curve di V con $d + 2$ nodi, la qual totalità ha dimensione non inferiore ad $h$. La $\Sigma$ potrà ben essere riducibile (anzi, come vedremo, lo è effettivamente); ma comunque $D_0$ giacerà in una *parte* irriducibile W di $\Sigma$, di dimensione almeno uguale ad $h$. Poichè una particolare curva, $D_0$, di W, è sconnessa, lo saranno tutte ([14]): la curva generica D di W risulterà cioè composta da una parte E, d'ordine $n - 1$ e genere virtuale $p - 1$ e da una retta $a$. Dico che E è irriducibile. Invero, se E fosse spezzata in $\lambda$ curve $E_1, E_2, \ldots, E_\lambda$ di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ e di generi $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ con $t$ punti d'intersezione da considerarsi come inesistenti, sarebbe $p - 1 = \Sigma p_i + t - \lambda + 1$, e poichè E è connessa, dovrebbe essere $t > 0$. Ora, una curva irriducibile, d'ordine $n_i$ e genere $p_i$, dipende da $3n_i + p_i - 1$ costanti; sicchè E dipenderebbe al più da $3\Sigma n_i + \Sigma p_i - \lambda$ costanti, e quindi $D = E + a$, al più da $3n + p - 3 - t$ parametri, mentre prima abbiamo trovato che la dimensione di W è almeno $3n + p - 3$. Si conclude che la generica E è irriducibile. D'altra parte la varietà W' di *tutte* le curve spezzate in una curva irriducibile d'ordine $n - 1$ e genere $p - 1$ ed in una retta, è irriducibile e dipende precisamente da $3n + p - 3$ costanti: dunque W coincide con W' e resta così stabilito il teorema enunciato.

Più in generale si prova in modo analogo, col processo d'induzione, che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva spezzata* C *d'ordine $n$, appartenga alla varietà delle curve irriducibili d'ordine $n$ e genere $p$, è che si possano scegliere alcuni nodi di* C, *in tal numero ed in tal posizione, che considerandoli come virtualmente inesistenti, si ottenga da* C *una curva connessa di genere virtuale $p$*.

Così p. es. alla varietà delle quartiche ellittiche irriducibili appartengono tutte le curve spezzate in una cubica ellittica ed in una retta, mentre

([13]) Cfr. Severi, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari*, ecc. (Rend. del Circolo mat. di Palermo, 20, 1905), n. 1, 2°).

([14]) Questa considerazione equivale in sostanza ad un ben noto principio di Enriques, che cioè una curva variabile con continuità, non può spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppî. Ved. Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie irregolari* (Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, dicembre 1904).

queste curve non appartengono alla varietà delle quartiche razionali irriducibili, perchè non possono considerarsi in alcun modo come curve connesse di genere virtuale zero.

Da quanto precede risulta che, se in una generica $D = E + a$ di W, si assegnano i $d - n + 3$ nodi di E ed $n - 3$ soltanto delle intersezioni di E con $a$, considerando come inesistenti le altre due $P, Q$, si ottiene una curva « totale » di V ed alla D sono pertanto infinitamente vicine curve irriducibili di V, che hanno i loro $d$ nodi infinitamente vicini agli assegnati.

Queste considerazioni sono importanti, perchè, come ho già detto, da esse si trae una *dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di esistenza di Riemann.* Si prova, infatti, anzitutto geometricamente, premettendo il computo del numero dei moduli di una curva di genere $p$ [15], che il gruppo di diramazione $G_{2n+2p-2}$ di una funzione algebrica ad $n$ rami, $u_1$, $u_2, \ldots, u_n$, di genere $p$, può assumersi ad arbitrio sulla retta $n$-pla (sfera complessa) $u$ [16].

Ciò posto, per dimostrare che si possono scegliere arbitrariamente anche le sostituzioni in G (purchè beninteso mediante esse la costruenda funzione risulti connessa), si distribuiscano i punti di G in $\sigma = n + p - 1$ coppie $A_i, B_i$ $(i = 1, \ldots, \sigma)$ permutanti ciascuna gli stessi due rami. Avendo dimostrato la possibilità dell'arbitraria scelta di G, è chiaro che basterà stabilir l'esistenza della funzione algebrica richiesta, quando i punti di due coppie, per es. $A_1, B_1$; $A_2, B_2$, tendono rispettivamente alle medesime posizioni limiti $H_1, H_2$, trascinandosi dietro le relative sostituzioni. Nè a cagione dei risultati topologici di Lüroth-Clebsch, i quali sono indipendenti da ogni questione di esistenza, è restrittivo il supporre, finchè $p > 0$, che le coppie $A_1, B_1$ ed $A_2, B_2$ permutino entrambe gli stessi rami $u_1, u_2$, e che questi quattro punti di diramazione sieno anzi i soli operanti su $u_1$. Astraendo allora da questi punti, i rami $u_2, \ldots, u_n$ restano connessi, e, ammesso dimostrato il teorema per le funzioni di genere $p - 1$ ad $n - 1$ rami, appena sia $n \geq p + 2$, si potrà costruire, in un piano per $u$, una curva E d'ordine $n - 1$, la quale si proietti da un centro O, sulla retta $(n-1)$-pla $u \equiv \equiv (u_2, u_3, \ldots, u_n)$, diramata nel modo assegnato nei punti $A_3, B_3, \ldots, A_\sigma, B_\sigma$.

Conducasi la retta $OH_1$, e fra gli $n - 1$ punti ov'essa taglia E, scelgasi quello, P, che si proietta sul ramo $u_2$; e similmente su $OH_2$ si scelga quel punto Q di E, che corrisponde ad $u_2$.

Posto $a \equiv PQ$, la curva composta $E + a$ proiettasi da O su $u$ secondo la retta $n$-pla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — ove $u_1$ è la proiezione di $a$ — ed è dira-

(15) Cfr. ad es. le mie citate *Lezioni*, pag. 196. Nell'edizione tedesca ho colmato una lacuna esistente in questo punto e che nelle *Lezioni* non avevo mancato di segnalare in modo esplicito.

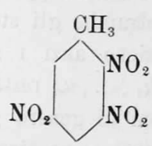
(16) Cfr. Enriques, *Sui moduli d'una classe* ecc. (citata), n. 1.

mata secondo il convenuto nei punti $H_1, H_2, A_3, B_3, \ldots, A_\sigma, B_\sigma$. Una curva irriducibile C, d'ordine $n$ e genere $p$, infinitamente prossima alla $E + a$ (nella quale i nodi P, Q si riguardino come inesistenti), proiettata da O su $u$, risolve la proposta questione di esistenza.

Si ha così un processo di riduzione da $p$ a $p-1$, mediante il quale, avendo supposto che sia $n \geq p+2$, ci si riduce a dimostrare il teorema per le curve razionali. E per queste poi lo si stabilisce usufruendo del fatto che, assegnati su $u$ $n-1$ punti di diramazione doppî $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$, e le sostituzioni permutanti in essi i rami $u_1, u_2, \ldots, u_n$, esiste sempre, in un piano per $u$, un $n$-latero $L \equiv a_1 a_2 \ldots a_n$, che si proietta dal centro O su $u$ secondo la retta $n$-pla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ diramata nel modo prefissato. Una curva razionale irriducibile, d'ordine $n$, infinitamente vicina ad L, ove si riguardino come inesistenti i nodi di L, che dànno per proiezioni i punti H, risponde allora alla questione di esistenza.

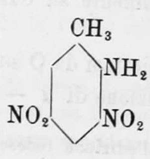
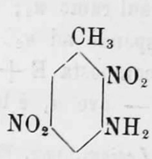
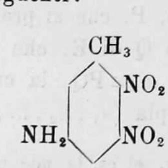
## Chimica. — *Il quinto trinitrotoluene, (ε), e prodotti dinitro-alogeno-sostituiti corrispondenti.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

Continuando le nostre ricerche intorno ai trinitrotolueni isomeri, per giungere alla preparazione dei due termini ancora ignoti, abbiamo voluto applicare ancora la reazione di sostituzione del gruppo nitrosilico a quello amidico in binitrotoluidine, convenientemente scelte, collo stesso procedimento da noi precedentemente usato [1]. Oggetto di questa Nota è lo studio del nuovo trinitrotoluene:



e di alcuni dinitroalogenotolueni corrispondenti.

Le dinitrotoluidine che per sostituzione del gruppo amidico col nitrosile possono dare il trinitrotoluene cercato, sono le seguenti:

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 5°; fasc. 9°; 2° sem. fasc. 10°.