ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Il tubo presentava l'aspetto dei soliti tubi Röntgen: l'emissione dei raggi X cominciò a rivelarsi, all'elettrometro, alla pressione di 392, pari a 0,033 mm. di mercurio, e alla pressione di 246 (pari a 0,020 mm. di mercurio) era già molto abbondante, così che, lasciando l'ago dell'elettrometro isolato per 5 secondi mentre le correnti del rocchetto passavano nel tubo, si aveva una deviazione di 80 divisioni per la carica portata dagli ioni prodotti dalla radiazione X. Anche coi tubi provenienti dalle fabbriche si ottennero, nelle stesse condizioni di corrente, deviazioni dello stesso ordine di grandezza: ma per quanto riguarda la relazione tra l'emissione dei raggi X e la pressione, riferirò in un'altra Nota, influendo molte circostanze sulla pressione corrispondente alla massima emissione dei raggi X.

Come ho già detto, altri gas vengono rapidamente assorbiti dagli elettrodi, oltre l'anidride carbonica; ma se con questi altri gas si possa ottenere la stabilità di funzionamento dei tubi Röntgen, è argomento di cui mi occuperò in seguito.

Matematica. — *Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche.* Nota di S. Zaremba, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Allargando un po' il significato d'un termine comunemente usato, chiameremo *equazione delle onde sferiche* l'equazione alle derivate parziali seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \tag{1}$$

Ci proponiamo di dimostrare un teorema fondamentale nella teoria di quegli integrali della (1), i quali si presentano nella fisica-matematica.

Considereremo le variabili

$$x_1 , x_2 , \dots x_n , t \tag{2}$$

come le coordinate cartesiane ortogonali d'un punto in uno spazio euclideo (E) di $n+1$ dimensioni.

2. Siano

$$A_1 , A_2 , \dots A_n , B \tag{3}$$

$n+1$ funzioni delle variabili (2), ben definite nell'interno e sul contorno (S) di un campo limitato (D), situato nello spazio (E).

Quando il contorno (S) di (D) e le funzioni (3) soddisfano a certe condizioni di regolarità, che sembra superfluo di enunciare, si ha, secondo un teorema noto, la relazione:

$$(4) \qquad \int_{(D)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial B}{\partial t} \right\} d\tau = - \int_{(S)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i + \beta B \right\} ds ,$$

designando con $d\tau$ l'elemento di volume dello spazio (E), con ds l'elemento di superficie del contorno (S) e con

$$(5) \qquad \alpha_1 , \alpha_2 , \dots \alpha_n , \beta$$

i coseni-direttori della normale a (S), diretta verso l'interno del campo (D). Le funzioni (5) sono legate fra loro dalla nota equazione:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 = 1 .$$

Sia u una funzione continua, ben definita nell'interno e sul contorno (S) del campo (D), avendo, nell'interno del campo (D), delle derivate continue dei due primi ordini.

Supponiamo inoltre che le derivate del primo ordine della funzione u siano limitate e godano della proprietà seguente: quando un punto $(x_1 , x_2 , \dots x_n , t)$, situato nell'interno del campo (D), tende verso un punto M del contorno (S) di codesto campo, le derivate

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} , \frac{\partial u}{\partial x_2} , \dots \frac{\partial u}{\partial x_n} , \frac{\partial u}{\partial t}$$

tendono verso limiti determinati, eccettuato al più, per M, un certo insieme di misura superficiale eguale a zero. Ciò posto, è lecito di convenire che, per un punto M situato in (S), i simboli (7) rappresentano i limiti delle derivate corrispondenti quando il punto $(x_1 , x_2 , \dots x_n , t)$ tende verso il punto M, rimanendo nell'interno del campo (D).

Posto

$$(8) \qquad \begin{cases} A_i = \dfrac{\partial u}{\partial t} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (i = 1 , 2 , \dots n) \\ B = -\dfrac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} , \end{cases}$$

si avrà:

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} .$$

Ora ammettiamo che la funzione u, pur soddisfacendo alle suddette ipotesi, verifichi inoltre l'equazione (1) nell'interno del campo (D). Dalle (4), (8) e (9) si avrà

$$\int_{(S)} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \beta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] ds = 0 . \tag{10}$$

3. Consideriamo il caso particolare in cui una parte (S_1) di (S) è una caratteristica [1] della (1) e designamo con (S') il resto del contorno del campo (D). Per la proprietà specifica delle caratteristiche della (1), si avrà

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \beta^2 = 0 \tag{11}$$

in ogni punto regolare della parte (S_1) di (S); quindi, in ciascuno di tali punti, si avrà dalla (6):

$$\beta^2 = \frac{1}{2} . \tag{12}$$

Tenendo conto delle (11) e (12) si vede subito che sia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \beta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} = \tag{13}$$

$$= - \beta \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 .$$

Non è forse inutile di far notare che dalla (12) *non* segue che su (S_1) la funzione β sia necessariamente costante: in fatti può darsi che su una parte di S_1 si abbia

$$\beta = \frac{+1}{\sqrt{2}}$$

e sul resto

$$\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} ,$$

ma noi considereremo soltanto il caso nel quale la funzione β ammette su (S_1) un solo dei due valori precedenti. Ciò posto, basta tener conto della (13) per ricavare dalla (10) la seguente:

$$\beta \int_{(S_1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 ds = \tag{14}$$

$$= \int_{(S')} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \beta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] ds .$$

[1] Per la teoria delle caratteristiche si può consultare l'opera di J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (Paris, 1903, A. Hermann).

Ecco perchè codesta equazione è interessante: *se l' integrale esteso alla parte* (S') *di* (S) *è eguale a zero, ne segue che, su* (S_1), *si ha*

$$\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \,, \qquad (i = 1 \,, 2 \,, \dots n) \,, \tag{15}$$

donde risulta che, su (S_1), *la funzione u è costante.*

4. Dal risultato testè ottenuto si possono dedurre varie importanti conseguenze, ma, per ora, considereremo soltanto il caso particolare che la (S') si componga di due parti (S_0) e (S_2) tali, che su (S_0) la funzione β sia sempre eguale al numero $+1$, o sempre al numero -1, e che su (S_2) si abbia $\beta = 0$.

Designando allora con ε un numero reale in valore assoluto eguale alla unità e di segno convenientemente scelto, si potrà scrivere la (14) nel modo seguente:

$$\beta \int_{(S_1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 ds = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \int_{(S_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} ds + \int_{(S_2)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} ds \,.$$

Da cotesta equazione si può dedurre il teorema seguente, che forma l'oggetto principale di questa nota:

Esiste al più una sola funzione continua u, che soddisfi nell'interno del campo (D) *alla* (1) *e che goda delle proprietà seguenti*:

1) *Su* (S_0) *la funzione u stessa e la sua derivata normale si riducono a delle funzioni date.*

2) *Su* (S_2) *la funzione stessa u o la sua derivata normale si riduce ad una funzione data.*

In fatti, basta dimostrare che la funzione u è eguale a zero in tutto il campo (D) nel caso particolare in cui le funzioni date, considerate nel teorema, sono nulle. Ma in tal caso il secondo membro della (16) si riduce a zero. Quindi, su (S_1) si verificheranno le (15). Ciò posto, sia ($\xi_1 , \xi_2 , \dots \xi_n , \tau$) un punto qualsiasi dell' interno del campo (D) e (D') la parte del campo (D) separata mediante il piano

$$t = \tau \tag{17}$$

dalla parte (S_0) del contorno del campo (D).

Il teorema espresso dalla (16) è applicabile al campo (D'). Quindi, tenendo conto delle (15), si ricava

$$\int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} ds = 0 \,,$$

dove l'integrazione deve essere estesa alla parte del piano (17) che contribuisce a limitare il campo (D'). Ne segue che in ogni punto $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \tau)$ dell'interno del campo (D) le derivate parziali del primo ordine della funzione u sono eguali a zero.

Quindi, la funzione u è costante nel campo (D). Ma questa funzione, essendo eguale a zero su (S_0), non può essere che nulla in tutto il campo (D), come avevamo annunziato.

In un altra Nota spero di mettere in rilievo l'importanza del teorema che è stato dimostrato.

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna.* Nota di CORRADINO MINEO, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Persistenza delle correnti fotoelettriche nelle cellule di Elster e Geitel dopo la soppressione della luce eccitatrice.* Nota I di O. M. CORBINO e G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Le correnti fotoelettriche, dovute a forti illuminazioni, possono raggiungere una notevole intensità qualora si ricorra alle cellule di Elster e Geitel, nelle quali l'elettrodo negativo, di potassio o di sodio, è ricoperto da uno strato sottile costituito da una modificazione allotropica del metallo medesimo. Nella cellula è presente un gas inerte, argon o elio, alla pressione di circa 1 millimetro di mercurio; facendo agire fra gli elettrodi un campo acceleratore di sufficiente intensità. gli elettroni strappati dalla luce al catodo vengono lanciati con velocità grande verso l'anodo, determinando una abbondante ionizzazione per urto nel gas. I nuovi ioni creati dall'urto divengono alla loro volta produttori di altri ioni; alla produzione di questi partecipano, con campi intensi, anche gli ioni positivi creati dagli urti, pur non raggiungendosi, se il campo non è troppo intenso, le condizioni che determinano la scarica permanente al cessare della luce.

Con illuminazioni molto intense, e con differenze di potenziale agli elettrodi solo di poco inferiori a quelle cui corrisponde la scarica permanente, le correnti ottenute con una cellula di Elster e Geitel possono raggiungere l'intensità di quasi un milliampere, prestandosi così a diverse e notevoli applicazioni.