ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1915.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Geometria. — *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* Nota di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO [1].

Scopo di questa Nota è di assegnare le superficie algebriche d'ordine $n = 6$, con infinite coniche tali che i loro piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 4$, cioè [2] di classe massima.

1. Sia γ una superficie algebrica irriducibile d'ordine $n = 6$, avente un fascio [3] di coniche (k) generalmente irriducibili.

Indichiamo con (π) l'inviluppo (irriducibile) costituito dai piani di queste, inviluppo che supporremo sempre di classe $\mu = 4$, e con s il numero di coniche di (k) esistenti in un piano generico di (π).

È noto [4] essere

$$12 = 2\mu s + \delta + 2\delta', \tag{1}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1915.

[2] In generale: per una superficie d'ordine $n > 4$, è sempre $\mu < n - 1$. Vedi il mio lavoro *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, ser. 5ª, vol. VIII (1915)], n. 2.

[3] È noto essere un fascio ogni sistema (necessariamente) ∞^1 irriducibile di coniche (generalmente irriducibili) esistente sopra una superficie algebrica d'ordine $n > 4$. Vedi De Franchis, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, ser. 3ª (1906)].

[4] Loc. cit. in [1].

ove δ è il numero dei punti doppî dell'involuzione I_2^1 secata dalle coniche di (k) sopra una sezione piana generica c di γ; e δ' è il numero di quei punti (distinti o no) di c, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta I_2^1.

Si noti inoltre che, indicando con p_c il genere di c, e con p_i il genere di I_2^1, cioè di (k), è (per la formula di Zeuthen) $\delta = 2(p_c + 1) - 4p_i$.

2. Si osservi, ora, che dalla (1), giacchè δ e δ' non sono negativi ed è $\mu = 4$, si deduce $s = 1$.

Inoltre, siccome certamente esistono piani tangenti a tre coniche di (k), ma non a tutte le coniche di questo *fascio*, così è sempre $\delta \geq 3$; anzi precisamente $\delta = 4$ e, quindi, $\delta' = 0$.

3. Sia (π) razionale e gobbo, onde (nn. 2 e 1) la sezione piana generica della superficie γ è di genere $p_c = 1$. Ne segue che γ è proiezione della superficie γ_1, dell' S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{123}^3|$, ove i punti $1, 2, 3$ sono in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche di γ_1 aventi per immagini le rette uscenti dal punto 1 (p. es.), coniche che costituiscono un fascio (k_1), generano una varietà a tre dimensioni la quale, come facilmente si dimostra, è d'ordine quattro. Proiettando γ_1 da un piano generico, in un S_3, otteniamo una superficie γ d'ordine $n = 6$, la quale possiede tre fasci di coniche; e i piani delle coniche di ognuno di questi fasci costituiscono un inviluppo (π) gobbo, razionale e di classe $\mu = 4$.

Che (π) sia gobbo, si dimostra osservando che se, invece, fosse conico, dovrebbe esistere un S_3 passante per il piano centro di proiezione, e contenente o una curva incontrata da tutti i piani del fascio (k_1), ovvero un punto comune a tutti questi piani medesimi. La prima ipotesi è assurda perchè il piano centro di proiezione è generico, e quindi non incontra la varietà costituita dai piani del fascio (k_1); la seconda ipotesi, poi, si esclude subito, osservando che due qualunque coniche di (k_1) non giacciono in uno stesso S_4.

4. Supponiamo, ora, che l'inviluppo (π), pur essendo ancora gobbo, sia ellittico, onde (nn. 2 e 1) è $p_c = 3$.

Dunque [1] la superficie γ esiste, ed è riducibile, mediante una trasformazione cremoniana, a un cono cubico ellittico, sul quale le sezioni piane di γ sono rappresentate da curve d'ordine otto, passanti doppiamente per il vertice del cono, con altri tre punti-base doppî e due punti-base semplici (distinti o infinitamente vicini) [2].

[1] Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* [Annali di Matematica, ser. 3ª, tomo XVI, n. 50; e tomo XVII, nn. 7 e 8].

[2] Si noti che γ non è alcuna delle superficie studiate dal Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXV (1890)], perchè γ è irrazionale e (k) non ha alcun punto-base.

5. Supponiamo, ora, che l'inviluppo (π) sia conico, cioè abbia un (solo) punto-base V; questo sarà doppio per γ e punto-base per il fascio (k).

6. Sia (π) razionale, onde (nn. 2 e 1) la sezione piana generica di γ è di genere $p_c = 1$. Ne segue che γ è proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{123}|$, ove i punti 1 e 2 sono infinitamente vicini tra loro.

7. Sia ora (π) ellittico (e conico), sia cioè $p_i = 1$, e quindi (nn. 2 e 1) $p_c = 3$. Ne segue, tenendo conto dei citati lavori di Castelnuovo e di Scorza, che γ esiste ed è rappresentabile sul cono cubico (ellittico) mediante un sistema lineare ∞^3 di curve del sesto ordine segate da quadriche che toccano il cono in un punto fisso [1], e passano per due punti generici di questo cono medesimo.

8. L'inviluppo (π) sia di genere $p_i = 2$.

Proiettando genericamente sopra un piano τ il fascio (k), si ottiene un sistema (k') ∞^1 di coniche (generalmente irriducibili) d'indice $\nu = 6$, cui appartengono, ognuna contata due volte, le quattro rette b_1, b_2, b_3, b_4, tracce, in τ, dei quattro piani di (π) passanti per il centro di proiezione. Anzi, se D è un punto qualunque di una di queste quattro rette, delle sei coniche di (k') passanti per D due coincidono con questa retta (doppia) medesima.

Stabiliamo ora un'omografia fra le coniche-luogo di τ e i punti di un S_5. È noto [2] che alle coniche di τ, ognuna costituita da una retta doppia, corrispondono i punti di una superficie ψ di Veronese. Siccome le rette b_1, b_2, b_3, b_4 appartengono ad un fascio, ad esse, contate due volte, corrispondono quattro punti B_1, B_2, B_3, B_4 di una stessa conica t di ψ. Inoltre, al sistema lineare ∞^4 delle coniche di τ passanti tutte per un punto D di b_1, p. es., corrisponde l'iperpiano tangente doppio Σ di ψ lungo la conica d corrispondente di D, e, per quanto sopra si disse, quest'iperpiano Σ deve segare la sestica c^6, corrispondente di (k'), in sei punti, due dei quali devono coincidere in B_1, onde Σ passa per la tangente di c^6 in B_1.

Ripetendo il medesimo ragionamento per ogni punto di b_1, si deduce che la tangente di c^6 in B_1 deve appartenere a tutti gli iperpiani tangenti doppî di ψ lungo le coniche di questa passanti per B_1. Ma tutti questi iperpiani hanno in comune soltanto il piano tangente a ψ in B_1, quindi la tangente di c^6 in questo punto appartiene a questo piano tangente. Concludendo, possiamo affermare che la curva c^6 e la superficie ψ si toccano nei punti B_1, B_2, B_3, B_4, onde c^6 appartiene all'iperpiano tangente doppio di ψ lungo la conica t, e il birapporto di questi quattro punti, considerati in t,

[1] Castelnuovo, loc. cit. in [5], n. 9.

[2] Segre, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e.....* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XX (1885)], n. 1.

è eguale a quello [1] dei quattro spazî $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ che, contenendo t, passano rispettivamente pei piani tangenti ψ in questi punti medesimi.

Ciò posto, dicasi φ la rigata cubica normale cui appartiene c^6, e t' la conica di φ passante pei punti B_1, B_2, B_3, B_4. Il piano tangente φ in B_1, p. es., e quello tangente ψ in questo stesso punto, hanno in comune la tangente di c^6 in B_1 stesso, onde essi giacciono in uno spazio passante per le due coniche complanari t e t'. Ne segue che il birapporto dei punti B_1, B_2, B_3, B_4, considerati in t', è eguale [2] a $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, e di conseguenza $t \equiv t'$.

Infine, siccome le generatrici di φ stabiliscono fra i punti di t e quelli della retta direttrice di φ la stessa proiettività stabilita dai piani generatori dell'ipersuperficie cubica Γ [3], costituita dai piani tangenti di ψ nei punti di t, concludiamo che φ, e quindi c^6, giace in Γ, il che è assurdo, perchè, se così fosse, la conica generica di (k') sarebbe degenere.

Concludiamo dunque che l'ipotesi $p_i = 2$ è da escludere [4].

9. L'ipotesi $p_i = 3$, infine, si esclude pure, sia indirettamente da quanto si disse nel num. precedente, sia osservando che le tangenti alle coniche di (k) in V, punto-base (n. 5) di (π) e di (k), dovrebbero formare un cono quadrico (degenere o no); ciò che è assurdo, perchè il fascio (k) è di genere $p_i = 3$ e non iperellittico.

10. Dal breve studio che si è fatto, possiamo concludere che

le superficie d'ordine $n = 6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 4$, sono le quattro superficie γ delle quali si parla rispettivamente nei nn. 3, 4, 6, 7.

[1] Chiamando corrispondenti un punto di t e uno spazio per B_1, B_2, B_3, B_4 ogni qual volta questo contiene il piano tangente ψ in quello, si ottiene un'omografia.

[2] Come la [8] sostituendo t' e φ rispettivamente a t e ψ.

[3] Essendo $t \equiv t'$, φ e ψ si toccano nei quattro punti B_1, B_2, B_3, B_4 (anzi in ogni punto di $t \equiv t'$), onde le generatrici di φ uscenti da questi punti appartengono ai piani tangenti di ψ in essi, e quindi la retta direttrice di φ, avendo già quattro punti in Γ, appartiene a questa.

[4] Le considerazioni fatte in questo n. 8, un po' lunghe, non sono inutili; esse guidano, come si vedrà in un mio prossimo lavoro, alle proprietà delle superficie con infinite coniche, qualunque siano i valori di n, μ, s, p_i. Per es., osservando che la c^n (analoga alla c^6 del testo) non deve giacere sull'ipersuperficie luogo dei piani delle coniche di ψ, si deduce $\mu < \frac{3n+1}{4s}$, limite assai più vantaggioso di quello conosciuto e rammentato nella [1].