ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del **1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. Ribaucour per il primo, costruendo la teoria dei sistemi ciclici, ha riconosciuto l'importanza, in geometria infinitesimale, della considerazione di quegli inviluppi di sfere a due parametri, sulle cui due falde si corrispondono le linee di curvatura. Le due superficie S, S' che formano le due falde di un tale inviluppo di Ribaucour, si diranno derivate l'una dall'altra per *trasformazione di Ribaucour*. In altre parole, due superficie S, S' saranno trasformate di Ribaucour l'una dell'altra se si corrispondono punto a punto in guisa che le normali in ogni coppia P, P' di punti corrispondenti s'incontrino in un punto M_0, equidistante da P, P', e quando P descrive una linea di curvatura di S il corrispondente P' descrive una linea di curvatura di S'. In tal caso la sfera descritta col centro in M_0 e di raggio $M_0P = M_0P'$ è la sfera inviluppante.

Nella presente Nota mi propongo di risolvere il problema di costruire le trasformazioni di Ribaucour pei sistemi tripli di superficie ortogonali. Più precisamente si ricercano tutte le coppie possibili di sistemi tripli ortogonali (Σ), $(\overline{\Sigma})$ che si corrispondono punto a punto e per linee di curvatura in guisa che, *in una delle tre serie* dei sistemi tripli, le superficie corrispondenti siano trasformate di Ribaucour l'una dell'altra. Cominceremo dal

[1] Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1915.

dimostrare che la circostanza, supposta per una delle tre serie, si verifica necessariamente anche per le altre due.

2. Siano u_1, u_2, u_3 i tre parametri che fissano la posizione di ogni singola superficie nelle rispettive tre serie, sicchè nella nostra ipotesi si corrisponderanno nei due sistemi $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ i punti di eguali coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3). Ora supponiamo, di più, che due qualunque superficie corrispondenti S, S′ in una delle tre serie, p. es. nella $u_3 = \text{cost}$, siano toccate in ogni coppia P, P′ di punti corrispondenti da una medesima sfera, Descriviamo allora per ogni tale coppia di punti il circolo C normale alla sfera inviluppante e quindi alle due superficie S, S′. È ben noto che il sistema degli ∞^2 circoli costruiti è un sistema ciclico (ved. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 281), cioè ammette una serie ∞^1 di superficie ortogonali, fra le quali figurano le due S, S′. Inoltre si sa che la congruenza degli assi di questo circolo ha sviluppabili reali, e queste corrispondono alle linee di curvatura $(u_1), (u_2)$ di S, S′. Se con F_1, F_2 si indicano i due fuochi della congruenza sull'asse del circolo C, le rette PF_1, $P'F_1$ sono le tangenti a due linee di curvatura corrispondenti di S, S′, e similmente le congiungenti $PF_2, P'F_2$ dànno le tangenti alle linee di curvatura dell'altro sistema (ibid., § 276). D'altra parte queste due tangenti $PF_1, P'F_1$ sono le normali nel punto P a due superficie corrispondenti di una delle altre due serie, diciamo le $u_1 = \text{cost}$; e similmente $PF_2, P'F_2$ saranno le normali a due superficie corrispondenti dell'altra serie $u_2 = \text{cost}$. E siccome $PF_1 = P'F_1$, $PF_2 = P'F_2$, ne risulta appunto che anche due superficie corrispondenti della serie $u_1 = \text{cost}$, o della $u_2 = \text{cost}$, sono trasformate di Ribaucour l'una dell'altra.

3. Premesse queste considerazioni geometriche, andiamo a ricercare coll'analisi tutti i sistemi tripli ortogonali $(\overline{\Sigma})$ trasformati di Ribaucour di un sistema dato (Σ). Questo sistema sarà definito, nel solito modo, dalla corrispondente espressione del ds^2

$$(1) \qquad ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2\,,$$

e si riterranno le consuete notazioni (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ pei coseni di direzione degli spigoli del triedro principale, e β_{ik} $(i \neq k)$ per le sei rotazioni. Si sa che queste rotazioni β_{ik} sono legate dal sistema differenziale

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = -\beta_{li}\,\beta_{lk}\,. \end{aligned} \right. \qquad (i \neq k \neq l)$$

Note le sei rotazioni β_{ik}, in funzione di u_1, u_2, u_3, è determinata l'immagine sferica del sistema triplo; ma esistono infiniti di questi sistemi colla stessa immagine sferica, cioè con eguale orientazione del triedro principale, che per ciò diconsi *paralleli*. Essi corrispondono alle singole terne (H_1, H_2, H_3) di soluzioni del sistema differenziale

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \qquad (i \neq k),$$

il cui integrale generale dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali.

Ricordiamo che i nove coseni (X_i, Y_i, Z_i) sono determinati, a meno di movimenti, dal sistema di equazioni ai differenziali totali

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u_i} = -\beta_{ki} X_k - \beta_{li} X_l \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{il} X_l . \end{cases} \qquad (i \neq k \neq l)$$

In fine, note le H_i e le X_i, si hanno per quadrature le coordinate x, y, z del punto variabile, che descrive il sistema triplo (Σ), dalle formole:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial x}{\partial u_i} = H_i X_i \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u_i} = H_i Y_i \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial u_i} = H_i Z_i .$$

4. Pel secondo sistema triplo $(\overline{\Sigma})$, che supponiamo legato a (Σ) da una trasformazione di Ribaucour, manteniamo le medesime notazioni, distinguendole con un soprassegno. Le normali in due punti corrispondenti, $P \equiv (x, y, z)$, $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, a due superficie della serie $u_i = \text{cost}$, s'incontrano, per ipotesi, in un punto F_i equidistante da $P, \overline{P}$; onde ponendo $PF_i = R_i$, deduciamo

$$x + R_i X_i = \overline{x} \pm R_i \overline{X}_i$$

colle analoghe in y, z.

Ma non alteriamo la generalità, limitandoci a prendere il segno superiore, bastando cangiare nel caso contrario $\overline{H}_i$ in $-\overline{H}_i$; così avremo

$$\text{(3)} \qquad \overline{X}_i = X_i + \frac{x - \overline{x}}{R_i} .$$

Ora, indicando con ξ, η, ζ i coseni della direzione da P a $\overline{P}$, poniamo

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \xi = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \\ \eta = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 \\ \zeta = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 , \end{cases}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tre funzioni di u_1, u_2, u_3 legate dalla relazione

$$\text{(5)} \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 .$$

Denotando poi con T il valore algebrico del segmento $P\overline{P}$, avremo

$$\overline{x} = x + T\xi \,, \tag{6}$$

colle analoghe per $\overline{y}, \overline{z}$; e, sostituendo nelle (3),

$$\overline{X}_i = X_i - \frac{T}{R_i}\xi \,. \tag{7}$$

Ora dobbiamo avere $S\overline{X}_i^2 = 1$ (¹); e siccome

$$SX_i^2 = 1 \quad , \quad S\xi^2 = 1 \quad , \quad S\xi X_i = \alpha_i \,,$$

dalle (7) deduciamo

$$\frac{T}{R_i} = 2\alpha_i \,,$$

e per ciò

$$\overline{X}_i = X_i - 2\alpha_i \xi \,. \tag{8}$$

Ma si osservi che, inversamente, se le α_i soddisfano la (5), queste formole

$$\overline{X}_i = X_i - 2\alpha_i(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)$$

dànno in effetto i coseni di direzione $(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i)$ $i = 1, 2, 3$, degli spigoli di un triedro trirettangolo, perchè risulta identicamente

$$S\overline{X}_i\overline{X}_k = 0 \qquad (i \neq k) \,.$$

5. Il nostro problema analitico consiste nel trovare le condizioni a cui debbono soddisfare le funzioni incognite $T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ affinchè le formole (6) definiscano un sistema triplo ortogonale $(\overline{\Sigma})$ col triedro principale $(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i)$. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti saranno date dalle relazioni

$$S\overline{X}_k \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_i} = 0 \qquad (i \neq k) \,, \tag{9}$$

soddisfatte le quali il nuovo sistema triplo ortogonale $(\overline{\Sigma})$ sarà trasformato di Ribaucour del sistema (Σ) e i raggi R_1, R_2, R_3 delle tre sfere inviluppanti saranno dati dalle formole

$$R_1 = \frac{T}{2\alpha_1} \quad , \quad R_2 = \frac{T}{2\alpha_2} \quad , \quad R_3 = \frac{T}{2\alpha_3} \,. \tag{10}$$

La condizione (9), a causa delle (2), (6), (7), si scrive

$$S(X_k - 2\alpha_k\xi)\left(H_i X_i + \frac{\partial T}{\partial u_i}\xi + T\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\right) = 0 \,; \tag{9*}$$

(¹) Col simbolo S indichiamo la somma di tre termini simili rispetto agli assi x, y, z.

e per calcolarla conviene tener conto delle seguenti identità:

$$\mathrm{S}\,\mathrm{X}_i\,\mathrm{X}_k = 0 \quad , \quad \mathrm{S}\,\mathrm{X}_k\,\xi = \alpha_k \quad , \quad \mathrm{S}\,\xi^2 = 1\,,$$

e delle altre che ne seguono per derivazione, tenendo conto delle (a):

$$\mathrm{S}\,\xi\,\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad \mathrm{S}\,\mathrm{X}_k\,\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki}\,\alpha_i\,.$$

Si trova, così,

$$-\alpha_k\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} + \mathrm{T}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki}\,\alpha_i\right) - 2\alpha_i\,\alpha_k\,\mathrm{H}_i = 0\,,$$

ossia

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} + 2\,\mathrm{H}_i\,\alpha_i\right) = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki}\,\alpha_i\right),$$

nella quale formola il valore del primo membro non dipende dall' indice k. Introduciamo tre nuove funzioni incognite $\gamma_1\,,\gamma_2\,,\gamma_3$, ponendo

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} + 2\mathrm{H}_i\,\alpha_i\right) = \gamma_i\,,$$

e dovremo avere insieme le formole

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} = \gamma_i\,\mathrm{T} - 2\,\mathrm{H}_i\,\alpha_i \tag{11}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} = \beta_{ki}\,\alpha_i + \alpha_k\,\gamma_i\,, \tag{12}$$

dopo di che, resterà a discutere, per le funzioni incognite $\mathrm{T}\,,\alpha_i\,,\gamma_i$, il sistema differenziale (11), (12), al quale è da aggiungersi l'equazione in termini finiti (5) per le α_i.

6. Confrontiamo due delle equazioni (11). Siano

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} = \gamma_i\,\mathrm{T} - 2\,\mathrm{H}_i\,\alpha_i$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_k} = \gamma_k\,\mathrm{T} - 2\,\mathrm{H}_k\,\alpha_k\,;$$

e costruiamo la corrispondente condizione d' integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\gamma_i\,\mathrm{T}) - \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma_k\,\mathrm{T}) + 2\,\frac{\partial}{\partial u_i}(\mathrm{H}_k\,\alpha_k) - 2\,\frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_i\,\alpha_i) = 0\,.$$

Sviluppando le derivazioni colle formule (11), (12) stesse e colle (B), resta semplicemente

$$T\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_k}-\frac{\partial\gamma_k}{\partial u_i}\right)=0 \text{ [1]};$$

e poichè T non si annulla, ne deduciamo

$$\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_k}=\frac{\partial\gamma_k}{\partial u_i},$$

cioè *l'espressione* $S\gamma_i\, du_i$ *deve essere un differenziale esatto*. Dopo ciò, possiamo esprimere le tre incognite γ_i per un'unica funzione Φ, ponendo

(13) $$\gamma_i=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \qquad (i=1,2,3),$$

ed introdurremo ancora, al posto delle α_i, tre nuove funzioni W_i, ponendo

(14) $$W_i=\Phi\alpha_i;$$

sicchè avremo, per la (5),

(14*) $$\Phi^2=W_1^2+W_2^2+W_3^2.$$

Le equazioni differenziali (12) dànno nelle W_i il sistema

(B*) $$\frac{\partial W_i}{\partial u_k}=\beta_{ik}\,W_k,$$

che è precisamente il sistema *aggiunto* del sistema (B) cui soddisfanno le H_i.

Le formole (11) diventano

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\Phi T)=-2H_i W_i,$$

ovvero, se poniamo

$$\Phi T=-2F,$$

(15) $$\frac{\partial F}{\partial u_i}=H_i W_i.$$

Ma appunto, essendo le H_i soluzioni del sistema (B) e le W_i del suo aggiunto (B*), l'espressione $\sum_i H_i W_i\, du_i$ è un differenziale esatto, onde

(15*) $$F=\int(H_1W_1\,du_1+H_2W_2\,du_2+H_3W_3\,du_3).$$

[1] La medesima condizione $\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_k}=\frac{\partial\gamma_k}{\partial u_i}$ si otterrebbe costruendo le condizioni d'integrabilità per le (12), servendosi delle (A).

Le formole (6), che dànno il sistema $(\overline{\Sigma})$ derivato, diventano, così,

$$\overline{x} = x - \frac{2\,F}{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}(W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3)\,. \tag{16}$$

Viceversa, se si prende una terna qualunque (W_1, W_2, W_3) di soluzioni del sistema $(B^\star)$, le formole (16), dove F è calcolata con una quadratura dalla $(15^\star)$, daranno un sistema triplo ortogonale $(\overline{\Sigma})$ derivato per trasformazione di Ribaucour dal sistema (Σ). E invero tutte le condizioni calcolate al n. 5 risultano allora soddisfatte.

7. Possiamo anche esprimere tutti gli elementi nelle formole (16) per l'unica funzione F e le sue derivate, ricordando che si ha, per le (15),

$$W_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial F}{\partial u_i}\,.$$

Le equazioni di condizione $(B^\star)$ per le W_i si traducono allora, per la funzione F, nelle tre equazioni simultanee del secondo ordine

$$(C)\qquad \left|\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_1}\,. \end{aligned}\right.$$

Scritte colla notazione simbolica delle derivate seconde covarianti, calcolate rispetto alla forma differenziale (1), queste si esprimono più brevemente così:

$$(C^\star)\qquad F_{12} = 0\quad,\quad F_{23} = 0\quad,\quad F_{31} = 0\,.$$

Ed osservando, poi, che si ha

$$\Phi^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = \Delta_1 F\,,$$

$$W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 = \sum_i \frac{1}{H_i^2}\frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial F}{\partial u_i} = \nabla(x, F)\,,$$

dove $\Delta_1 F$, $\nabla(x, F)$ indicano i noti parametri differenziali, daremo alle (16) la forma definitiva seguente:

$$(\mathrm{II})\qquad \overline{x} = x - \frac{2F}{\Delta_1 F}\nabla(x, F)\quad,\quad \overline{y} = y - \frac{2F}{\Delta_1 F}\nabla(y, F)\,,$$

$$\overline{z} = z - \frac{2F}{\Delta_1 F}\nabla(z, F)\,.$$

Queste formole, nelle quali si ponga per F una qualunque soluzione del sistema (C), dànno tutti i sistemi tripli ortogonali $(\overline{\Sigma})$ derivati dal primitivo (Σ) per trasformazione di Ribaucour. Osserveremo che le formole (8) pei coseni $\overline{X}_i$ si scrivono, alla loro volta,

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \overline{X}_i = X_i - \frac{2}{H_i \Delta_1 F} \frac{\partial F}{\partial u_i} \nabla(x\,, F)\,, \text{ ecc.}$$

8. Dalle (10), calcolando i raggi R_i delle sfere inviluppanti, abbiamo

$$R_i = \frac{T}{2\alpha_i} = \frac{\Phi T}{2\Phi\alpha_i} = -\frac{F}{W_i}\,,$$

ossia

$$(17) \qquad R_i = -\frac{H_i F}{\dfrac{\partial F}{\partial u_i}}\,.$$

Ne risulta il teorema di Ribaucour [ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2ème édition), pag. 400): *Dato un sistema triplo ortogonale* (Σ), *se si prende una soluzione qualunque* F *del sistema* (C), *e sulle tre normali in un punto* P *si riportano i tre segmenti* $PF_i = R_i$ *dati dalla* (17), *le tre sfere coi centri in* F_1, F_2, F_3 *che passano per* P, *passano anche per un secondo punto* $\overline{P}$ *il quale descrive un nuovo sistema triplo ortogonale* $(\overline{\Sigma})$.

Ma la ricerca eseguita nei nn. precedenti dimostra, inoltre, che questo teorema di Ribaucour dà il più generale sistema triplo ortogonale $(\overline{\Sigma})$ derivato da Σ per una trasformazione di Ribaucour.

9. È già stato osservato dal Darboux (loc. cit., pag. 401) che il teorema di Ribaucour, applicato alla ricerca di nuovi sistemi tripli ortogonali, non dà nulla di più dei metodi combinati delle trasformazioni parallele (o di Combescure) e delle inversioni per raggi vettori reciproci. Si riconosce meglio l'identità dei due metodi, ponendola sotto questa forma più espressiva:

Se due sistemi tripli ortogonali $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ *sono trasformati di Ribaucour l'uno dell'altro, esistono due altri sistemi tripli ortogonali* $(\Sigma'), (\overline{\Sigma}')$ *rispettivamente paralleli a* $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ *e che si deducono l'uno dall'altro con un'inversione per raggi vettori reciproci.*

Per dimostrarlo, riferiamoci alle formole sopra stabilite ed osserviamo che, siccome W_1, W_2, W_3 soddisfanno alle (B^*), se si pone

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 \\ y' = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + W_3 Y_3 \\ z' = W_1 Z_1 + W_2 Z_2 + W_3 Z_3\,, \end{cases}$$

queste formole definiscono un sistema triplo ortogonale (Σ') parallelo a (Σ).

Precisamente, derivando queste rapporto ad u_i, si ottiene

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \mathrm{H}'_i \mathrm{X}_i ,$$

dove

$$\mathrm{H}'_i = \frac{\partial \mathrm{W}_i}{\partial u_i} + \beta_{ki} \mathrm{W}_k + \beta_{li} \mathrm{W}_l ,$$

od anche, esprimendo per la funzione F,

$$\mathrm{H}'_i = \frac{\mathrm{F}_{ii}}{\mathrm{H}_i} , \tag{19}$$

formole che dànno i valori dei coefficienti H'_i pel sistema (Σ'). Con una inversione per raggi vettori reciproci, rispetto alla sfera col centro nell'origine e di raggio $=1$, cangiamo il sistema (Σ') nell'inverso $(\overline{\Sigma}')$, colle formole

$$\overline{x}' = \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} , \quad \overline{y}' = \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} , \quad \overline{z}' = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} . \tag{20}$$

Queste, derivate rapporto ad u_i, coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \mathrm{H}'_i \mathrm{X}_i \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_i}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\, \mathrm{S}\, x' \frac{\partial x'}{\partial u_i} = 2\, \mathrm{H}'_i \mathrm{W}_i ,$$

dànno le formole

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial u_i} = \frac{\mathrm{H}'_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\left(\mathrm{X}_i - \frac{2\, x' \mathrm{W}_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right),$$

ovvero anche, colle notazioni del n. 4,

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial u_i} = \frac{\mathrm{H}'_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2}(\mathrm{X}_i - 2\,\alpha_i\,\xi) = \frac{\mathrm{H}'_i}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\overline{\mathrm{X}}_i .$$

Dunque il sistema $(\overline{\Sigma}')$ è parallelo al sistema derivato $(\overline{\Sigma})$, c. d. d.

Possiamo anche dire che la trasformazione di Ribaucour, la quale conduce dal sistema (Σ) al derivato $(\overline{\Sigma})$, si decompone in questi tre passaggi successivi: 1°) da (Σ) a (Σ') con una trasformazione parallela (o di Combescure); 2°) da (Σ') a $(\overline{\Sigma}')$ con una inversione per raggi vettori reciproci; 3°) da $(\overline{\Sigma}')$ a (Σ') con una trasformazione parallela.

In conclusione: *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali si compongono di trasformazioni di Combescure e di inversioni per raggi vettori reciproci.*

10. Il metodo, che abbiamo tenuto in questa Nota per la ricerca delle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali, si estende facil-

mente al problema analogo *pei sistemi n^{pli} ortogonali* nello spazio S_n euclideo definito da

$$(21)\qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2 .$$

Estese le considerazioni geometriche del n. 2 ai sistemi n^{pli} ortogonali, basta invero riprendere i calcoli dei nn. 3-7 colle formole generali dei sistemi n^{pli} ortogonali per giungere ai risultati seguenti.

Si prenda una qualunque soluzione $F = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ del sistema differenziale

$$F_{ik} = 0 \qquad (i \neq k),$$

ottenuto eguagliando a zero le derivate seconde miste covarianti di F [calcolate rispetto alla forma differenziale (21)], sistema la cui soluzione generale contiene n funzioni arbitrarie essenziali. Allora le formole stesse (I)

$$(\mathrm{II})\qquad \overline{x}_i = x_i - \frac{2F}{\varDelta_1 F}\, \nabla(x_i, F) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

daranno il più generale sistema n^{plo} ortogonale $(\overline{\Sigma})$, derivato per trasformazione di Ribaucour dal sistema primitivo (Σ).

La formola (17) per $i = 1, 2, \dots, n$ fornisce i raggi delle n ipersfere, che toccano le n superficie coordinate in un medesimo punto P di (Σ), e passano per un secondo punto $(\overline{P})$ che descrive il nuovo sistema n^{plo} ortogonale $(\overline{\Sigma})$. È questo il *teorema di Ribaucour esteso all'* S_n *euclideo.*

Osserviamo, ancora, che dalle (II), servendosi delle formole di derivazione invariantiva, si calcolano facilmente i coefficienti $\overline{H}_i$ pel sistema derivato $(\overline{\Sigma})$, e si trova

$$(22)\qquad \overline{H}_i = H_i - \frac{2F \cdot F_{ii}}{H_i \varDelta_1 F},$$

formole che valgono in particolare per $n = 3$.

Ed anche qui, nello spazio euclideo ad n dimensioni, si vede che le trasformazioni di Ribaucour si decompongono in trasformazioni parallele ed inversioni per raggi vettori reciproci. Ma non è senza interesse osservare che, se dagli spazî euclidei si passa agli spazî generali a curvatura costante, rappresentandosi questi conformemente sullo spazio euclideo con conservazione delle sfere, esistono ancora manifestamente le trasformazioni di Ribaucour, ma non sono più decomponibili come nello spazio euclideo.

11. Ritornando per semplicità al caso dello spazio ordinario, consideriamo sulle tre normali alle superficie coordinate in un punto P i tre centri F_1, F_2, F_3 delle sfere inviluppanti. Da quanto si è detto al n. 2, risulta che il triangolo $F_1 F_2 F_3$ viene proiettato dai due punti corrispondenti $P, \overline{P}$ di $(\Sigma), (\overline{\Sigma})$ secondo i due rispettivi triedri principali. Inoltre, se

spostiamo la coppia $(P, \bar{P})$ lungo le corrispondenti superficie di una delle tre serie, p. es. della $u_3 = \text{cost}$, il lato $F_1 F_2$ del triangolo descrive una congruenza ciclica di cui F_1, F_2 sono i fuochi. Similmente per gli altri due lati.

Un' ulteriore proprietà della trasformazione di Ribaucour si ha nel seguente teorema:

In ogni coppia $(\Sigma), (\bar{\Sigma})$ *di sistemi tripli ortogonali derivati l'uno dall'altro per trasformazione di Ribaucour, i tre centri delle sfere inviluppanti descrivono tre sistemi tripli coniugati.*

Per dimostrarlo prendiamo p. es. le coordinate x_3, y_3, z_3 del centro F_3 date da

$$x_3 = x + R_3 X_3 = x - \frac{F}{W_3} X_3, \tag{23}$$

colle analoghe. Se si osservano le identità

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = H_1 H_1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = H_2 X_2 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = H_3 X_3$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial u_1} = \beta_{31} X_1 \quad , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_2} = \beta_{32} X_2 \quad , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_3} = -\beta_{13} X_1 - \beta_{23} X_2 \,,$$

e le altre

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{F}{W_3}\right) = \frac{W_1}{W_3^2}(H_1 W_3 - \beta_{31} F) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{F}{W_3}\right) = \frac{W_2}{W_3^2}(H_2 W_3 - \beta_{32} F),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{F}{W_3}\right) = H_3 - \frac{F}{W_3^2}\frac{\partial W_3}{\partial u_3} \,,$$

si calcolano dalle (23) le derivate prime

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial u_1} &= \frac{H_1 W_3 - \beta_{31} F}{W_3^2}(W_3 X_1 - W_1 X_3) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_2} &= \frac{H_2 W_3 - \beta_{32} F}{W_3^2}(W_3 X_2 - W_2 X_3) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_3} &= \frac{F}{W_3}\left(\beta_{13} X_1 + \beta_{23} X_2 + \frac{1}{W_3}\frac{\partial W_3}{\partial u_3} X_3\right). \end{aligned} \right. \tag{24}$$

Sarà provato il teorema se si dimostra che le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u_1 \, \partial u_2} \,, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial u_2 \, \partial u_3} \,, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial u_1 \, \partial u_3}$$

si compongono linearmente ed omogeneamente colle rispettive coppie di derivate prime

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right) \quad , \quad \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right) \quad , \quad \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}, \frac{\partial x_3}{\partial u_3}\right),$$

mediante coefficienti che rimangono gli stessi per y_3, z_3. Questo risulta subito dalla forma delle (24), coll'osservare le seguenti identità:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u_2}(W_3 X_1 - W_1 X_3) = \left(\beta_{12} - \frac{\beta_{32} W_1}{W_3}\right)(W_3 X_2 - W_2 X_3) + \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{\beta_{32} W_2}{W_3}(W_3 X_1 - W_1 X_3) \\
&\frac{\partial}{\partial u_3}(W_3 X_1 - W_1 X_3) = \frac{W_1 W_3}{F}\frac{\partial x_3}{\partial u_3} + \frac{1}{W_3}\frac{\partial W_3}{\partial u_3}(W_3 X_1 - W_1 X_3) \\
&\frac{\partial}{\partial u_3}(W_3 X_2 - W_2 X_3) = \frac{W_2 W_3}{F}\frac{\partial x_3}{\partial u_3} + \frac{1}{W_3}\frac{\partial W_3}{\partial u_3}(W_3 X_2 - W_2 X_3).
\end{aligned}\right.$$

Osserviamo, di più, che, se si pone

$$h_1 = H_1 - \frac{\beta_{31} F}{W_3} \quad , \quad h_2 = H_2 - \frac{\beta_{32} F}{W_3} \quad , \quad h_3 = \frac{F}{W_3}, \tag{25}$$

dalle formole

$$\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\,\beta_{21} \quad , \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\,\beta_{12},$$

risulta

$$\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21} - \beta_{31}\frac{W_2}{W_3} \quad , \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{12} - \frac{\beta_{32} W_1}{W_3}.$$

Dopo ciò, si vede che x_3, y_3, z_3 sono tre soluzioni del seguente sistema differenziale:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_2} &= \frac{\partial \lg h_1}{\partial u_2}\frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \lg h_2}{\partial u_1}\frac{\partial \theta}{\partial u_2} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} &= \frac{\partial \lg h_2}{\partial u_3}\frac{\partial \theta}{\partial u_2} + \frac{\partial \lg h_3}{\partial u_2}\frac{\partial \theta}{\partial u_3} \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_3 \partial u_1} &= \frac{\partial \lg h_3}{\partial u_1}\frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \lg h_1}{\partial u_3}\frac{\partial \theta}{\partial u_1},
\end{aligned}\right.$$

e questo caratterizza appunto il sistema triplo coniugato.

12. Termineremo queste considerazioni sulle trasformazioni di Ribaucour pei sistemi tripli ortogonali coll'osservare che sussiste anche qui un

teorema di permutabilità, di cui non è difficile dare la dimostrazione, colle formole effettive:

Se due sistemi tripli ortogonali (Σ_1), (Σ_2) *provengono da un medesimo* (Σ) *per trasformazioni di Ribaucour, esiste una serie* ∞^1 *di sistemi come* (Σ) *(determinabile con una quadratura), da ciascuno dei quali provengono egualmente* (Σ_1), (Σ_2) *per trasformazioni di Ribaucour.*

In fine osserviamo che le formole per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali includono, come caso particolare, quelle delle trasformazioni stesse per le superficie isolate S. Basta infatti considerare la S nel sistema triplo ortogonale determinato dalle sue superficie parallele.

Se riferiamo la S alle sue linee di curvatura (u, v), e riteniamo le consuete notazioni, si otterranno tutte le trasformate $\overline{S}$ di Ribaucour della S nel modo seguente: Si determini una terna di funzioni W_1, W_2, W_3 di u, v che soddisfino al sistema differenziale

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} W_2, \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} W_1 \\ &\frac{\partial W_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} W_2; \end{aligned}\right.$$

determinata con una quadratura la funzione F data da

$$F = \int \left(\sqrt{E}\, W_1\, du + \sqrt{G}\, W_2\, dv\right),$$

si avrà, per le formole richieste,

$$\overline{x} = x - \frac{2F}{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2} (W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3).$$