ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulla flessione delle superficie inestendibili.* Nota di Matteo Bottasso, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo [1].

Stabiliremo, per la flessione di una superficie inestendibile, alcune formule omografico-vettoriali assolute, fondamentali per tutti i problemi della applicabilità, come risulterà, oltrechè dagli esempî dei nn. 7-9, da un prossimo lavoro sul problema del rotolamento di una superficie sopra un'altra, ad essa applicabile.

Siano S, S_0 due superficie; e fra il punto generico P di S ed il punto generico P_0 di S_0 sia stabilita una corrispondenza biunivoca, per modo che P_0 è funzione di P, variabile in S, e P è funzione di P_0 variabile in S_0 [2].

Per gli elementi $\mathbf{N}$ (vettore unitario normale in P ad S), la dilatazione σ di S, e per i corrispondenti $\mathbf{N}_0$, σ_0 di S_0, valgono le note posizioni e proprietà essenziali:

$$(a)\qquad \sigma = \frac{d\mathbf{N}}{dP} \quad , \quad \sigma\mathbf{N} = 0 \quad , \quad \sigma_0 = \frac{d\mathbf{N}_0}{dP_0} \quad , \quad \sigma_0\mathbf{N}_0 = 0\,.$$

A causa della corrispondenza tra P e P_0, ad ogni spostamento $dP, \delta P, \ldots$, normale ad $\mathbf{N}$, corrisponde uno spostamento determinato dP_0, δP_0, ... normale ad $\mathbf{N}_0$. Inoltre, affinchè S de S_0 siano *applicabili*, come supporremo, nei punti corrispondenti P, P_0, occorre e basta (*Fond.*, n. 9) che per ogni spostamento dP di P si abbia:

$$(b)\qquad (dP)^2 = (dP_0)^2\,,$$

Ciò equivale a dire (*A. V.*, I, pag. 47, od *Isom.*) che esiste una *isomeria vettoriale* λ, ad invariante terzo positivo,

$$(c)\qquad \lambda\,.\,\mathrm{K}\lambda = \mathrm{K}\lambda\,.\,\lambda = 1 \quad , \quad \mathrm{I}_3\,\lambda = 1\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1915.

[2] Citeremo i lavori seguenti: *a)* C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. I, II (Pavia, Mattei e C., 1912-13); *b)* C. Burali-Forti, *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie* (Atti della R. Accademia di Torino, vol. XLV, 1909-10, pp. 388-400); *c)* Id., *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie, col metodo vettoriale generale* (Rend. Circ. matem. di Palermo, tom. XXXIII, 1° sem. 1912, pp. 1-40). *d)* Id., *Isomerie vettoriali e moti geometrici* [Mem. R. Accad. di Torino (2ª), LXV, 1915, n. 14]. Nel seguito richiameremo brevemente e rispettivamente questi lavori con « *A. V.* », « *Gr.* », « *Fond.* », « *Isom.* ».

funzione di P (e, quindi, anche di P_0), tale che, per d arbitrario,

$$(d) \qquad \lambda\, dP = dP_0 \quad , \quad \lambda \mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \quad [1].$$

In ciò che segue supponiamo che $\mathbf{u}$ sia un vettore funzione di P e normale ad $\mathbf{N}$ (cioè $\mathbf{u} \times \mathbf{N} = 0$), e poniamo $\mathbf{u}_0 = \lambda \mathbf{u}$. Ne segue che $\mathbf{u}_0$ è normale ad $\mathbf{N}_0$, perchè $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{N}_0 = \lambda \mathbf{u} \times \lambda \mathbf{N} = \mathbf{u} \times \mathbf{N} = 0$.

Formule fondamentali della flessione.

1. Per l'omografia $d\lambda$, che non è un'isomeria (*Fond.*, pag. 9), si hanno le notevoli formule seguenti, che la caratterizzano completamente:

$$(1) \qquad d\lambda \,.\, \mathbf{N} = (\sigma_0 \lambda - \lambda \sigma)\, dP \quad [2],$$

$$(2) \qquad d\lambda \,.\, \mathbf{u} = \mathrm{H}\,\{(\lambda\sigma - \sigma_0 \lambda)\, \mathbf{u} \,, \mathbf{N}_0\}\, dP_0 \,.$$

La (1) segue subito differenziando la 2ª delle (d), poichè, per le (a) e (d), si ha, così,

$$d\lambda . \mathbf{N} = d\mathbf{N}_0 - \lambda\, d\mathbf{N} = \sigma_0\, dP_0 - \lambda\sigma\, dP = \sigma_0 \lambda\, dP - \lambda\sigma\, dP .$$

Per la (2) si osservi che, differenziando $\lambda \delta P = \delta P_0$, si ha:

$$d\lambda \,.\, \delta P = d\,\delta P_0 - \lambda\, d\, \delta P,$$

e quindi, sviluppando i doppî prodotti vettoriali e per le (d), (b), si ottiene:

$$\begin{aligned}(d\lambda \,.\, \delta P) \wedge (dP_0 \wedge \delta P_0) &= (d\,\delta P_0 \times \delta P_0 - \lambda\, d\delta P \times \delta P_0)\, dP_0 - \\ &\qquad - (d\,\delta P_0 \times dP_0 - \lambda\, d\,\delta P \times dP_0)\, \delta P_0 \\ &= (d\,\delta P_0 \times \delta P_0 - d\,\delta P \times \delta P)\, dP_0 - (d\,\delta P_0 \times dP_0 - d\,\delta P \times dP)\, \delta P_0 \\ &= \tfrac{1}{2}\, d\left[(\delta P_0)^2 - (\delta P)^2\right] dP_0 - \tfrac{1}{2}\, \delta\left[(dP_0)^2 - (dP)^2\right] \delta P_0 = 0 ;\end{aligned}$$

il che prova che $d\lambda . \delta P$ è parallelo a $dP_0 \wedge \delta P_0$, cioè ad $\mathbf{N}$. E siccome δP è arbitrario fra i vettori $\mathbf{u}$ normali ad $\mathbf{N}$, è $d\lambda . \mathbf{u} = h \mathbf{N}_0$, da cui, moltiplicando internamente per $\mathbf{N}_0$, per il teorema di commutazione e la $(1)^0$, si ha:

$$\begin{aligned} h = \mathbf{N}_0 \times d\lambda . \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathrm{K}\, d\lambda . \mathbf{N}_0 &= \mathbf{u} \times (\sigma . \mathrm{K}\,\lambda . \sigma_0)\, dP_0 = \\ &= dP_0 \times (\lambda\sigma - \sigma_0 \lambda)\, \mathbf{u} ,\end{aligned}$$

che, sostituita nella precedente, dà la (2).

[1] Che equivalgono a:

$$(d)^0 \qquad \mathrm{K}\lambda\, dP_0 = dP \quad , \quad \mathrm{K}\lambda \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} .$$

[2] Ossia l'equivalente:

$$(1)^0 \qquad d\mathrm{K}\lambda \,.\, \mathbf{N}_0 = (\sigma \mathrm{K}\lambda - \mathrm{K}\lambda \,.\, \sigma_0)\, dP_0 .$$

Anche nel seguito scriveremo (in generale) una sola delle formule, ottenendosi l'altra cambiando $\sigma, \lambda, \mathbf{N}, \mathbf{u}, P$, in $\sigma_0, \mathrm{K}\lambda, \mathbf{N}_0, \mathbf{u}_0$.

Osservazione. — Siccome, per le (a) e (d), $\lambda\sigma - \sigma_0\lambda$ trasforma ogni vettore $\mathbf{u}$ (normale ad $\mathbf{N}$) in un vettore normale ad $\mathbf{N}_0$, le (1) e (2) esprimono che *l'omografia* $d\lambda$ *trasforma vettori* paralleli *o* normali *ad* $\mathbf{N}$ *in vettori* normali *o* paralleli *ad* $\mathbf{N}_0$.

2. Differenziando $\mathbf{u}_0 = \lambda\mathbf{u}$, e per la $(c)^0$, si ha:

$$d\mathbf{u}_0 = \lambda\, d\mathbf{u} + d\lambda\,.\,\mathbf{u} = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,dP + d\lambda\,.\,\mathbf{u} = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathrm{K}\lambda\, dP_0 + d\lambda\,.\,\mathbf{u}\,,$$

dalla quale, per la (2), s'ottiene immediatamente:

$$\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathrm{K}\lambda + \mathrm{H}\,\{(\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{N}_0\}\,. \tag{3}$$

Applicando i due membri della (3) ad $\mathbf{N}_0 = \lambda\mathbf{N}$, e moltiplicando poi vettorialmente per $\mathbf{N}_0$, si ha:

$$\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}\mathbf{N}_0 = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\quad,\quad \left(\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}\mathbf{N}_0\right)\wedge\mathbf{N}_0 = \lambda\left[\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\right)\wedge\mathbf{N}\right]. \tag{4}$$

Siccome λ è invertibile, le (4) esprimono che *i vettori* $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$, $\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}\mathbf{N}_0$ *sono entrambi o nulli, o non nulli: se il primo è parallelo ad* $\mathbf{N}$, *il secondo è parallelo ad* $\mathbf{N}_0$, *ed inversamente.*

La *condizione di parallelismo di* $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ con $\mathbf{N}$ (che comprende l'annullamento del primo vettore) è dunque *un invariante di flessione.*

3. Dalle (3) si ottiene pure, facilmente,

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{I}_1\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_1\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,,\\
&\mathrm{I}_2\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_2\frac{d\mathbf{u}}{dP} - (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\times\lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,,\\
&\mathrm{I}_3\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} = \mathrm{I}_3\frac{d\mathbf{u}}{dP} - (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\times\lambda\left(\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Infatti, la prima si ha subito operando sui due membri della (3) con I_1; operando invece con I_2, I_3, si ha {*A. V.*, II, pag. 136 [10], [11]; vol. I, pag. 38 [5], pag. 49 [4]; e $(d)^0$}:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} &= \mathrm{I}_2\frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\times\mathrm{C}\left(\lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\cdot\mathrm{K}\lambda\right)\mathbf{N}_0\,,\\
\mathrm{I}_3\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0} &= \mathrm{I}_3\frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\times\mathrm{R}\left(\lambda\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\cdot\mathrm{K}\lambda\right)\mathbf{N}_0\\
&= \mathrm{I}_3\frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\lambda\sigma - \sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\times\lambda\mathrm{RK}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\,,
\end{aligned}$$

dalle quali seguono subito }*A. V.*, I, pag. 23 [5], pag. 38 [2]; e (*d*), n. 1, osserv.{ le due ultime (5).

4. Osserviamo che quando $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ è parallelo ad $\mathbf{N}$, i vettori $\lambda\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$, $\lambda\left(\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ risultano, per le (4), paralleli ad $\mathbf{N}_0$; perciò (n. 1, osserv.)

$$\mathrm{I}_r\frac{d\mathbf{u}_0}{dP_0}=\mathrm{I}_r\frac{d\mathbf{u}}{dP}\ (r=1\,,2\,,3),\ \text{per}\ \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}\ \text{parallelo ad}\ \mathbf{N}\,. \tag{6}$$

E dalle (3)-(6) segue che $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$ *non è un invariante di flessione, mentre lo è sempre il suo invariante primo*; *e lo sono anche gli altri due invarianti purchè* $\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{N}$ *sia un vettore (nullo o) parallelo ad* $\mathbf{N}$.

Notiamo pure che, operando con $2\mathbf{V}$ nella (3), si ha subito (*A. V.*, I, pag. 70 [1], pag. 44 [7], pag. 49 [4]):

$$\mathrm{rot}_{P_0}\mathbf{u}_0=\lambda\,\mathrm{rot}_P\mathbf{u}-\mathbf{N}_0\wedge(\lambda\sigma-\sigma_0\lambda)\,\mathbf{u}\,. \tag{7}$$

5. Se φ è un numero funzione di P (e, quindi, anche di P_0) variabile in S, per la (*d*) si ha (*A. V.*, I, pag. 90 [2']) $\lambda\,\mathrm{grad}_P\varphi=\mathrm{grad}_{P_0}\varphi$; e poichè (*Fond.*, n. 11) $\mathrm{Grad}_P\varphi=\mathrm{grad}_P\varphi-\mathbf{N}\times\mathrm{grad}_P\varphi\,.\mathbf{N}$, operando con λ nei due membri si ha:

$$\lambda\,\mathrm{Grad}_P\varphi=\mathrm{Grad}_{P_0}\varphi\,. \tag{8}$$

Dalla (8), e per le (*c*), (5), segue subito che i numeri

$$(\mathrm{Grad}_P\varphi)^2\quad,\quad \mathrm{I}_1\frac{d\,\mathrm{Grad}_P\varphi}{dP}=\mathrm{div}\,\mathrm{Grad}_P\varphi\,, \tag{9}$$

sono *invarianti di flessione*, qualunque sia φ; mentre l'invariante secondo e terzo di $\frac{d\,\mathrm{Grad}_P\varphi}{dP}$ lo sono soltanto sotto le condizioni indicate per le (6) [1].

6. Siano O un punto e $\mathbf{k}$ un vettore unitario, entrambi indipendenti da P (cioè costanti). È utile considerare i numeri ben noti (*Gr.*, n. 6)

$$z=\mathbf{k}\times(P-O)\quad,\quad \varrho=\tfrac{1}{2}(P-O)^2\quad,\quad w=(P-O)\times\mathbf{N}\,, \tag{10}$$

[1] Sotto tali condizioni, $\mathrm{I}_2\frac{d\,\mathrm{Grad}_P\varphi}{dP}$ è l'ordinario $\varDelta_{22}\varphi$; inoltre gli elementi (9) corrispondono a $\varDelta_1\varphi$, $\varDelta_2\varphi$, tutti però calcolati rispetto alla prima forma differenziale $(dP)^2$. Dalle (9) e dall'espressione della *curvatura geodetica* in P alla linea $\varphi=\mathrm{cost}$ [*Fond.*, n. 23 (3)] risulta subito che tale curvatura *non varia con la flessione*.

di significato geometrico preciso e semplice, e dipendenti inoltre esclusivamente da $O, P, \mathbf{N}, \mathbf{k}$, e, quindi, *assoluti*.

Sottintendendo l'indice P a Grad, è già noto (*Gr.*, n. 6) che si ha:

$$(11)\quad \mathrm{Grad}\, z = \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathbf{N}\ , \qquad (12)\quad \mathrm{Grad}\, \varrho = (P - O) - w\mathbf{N},$$

$$(13)\qquad \frac{d\,\mathrm{Grad}\, z}{dP} = -\mathbf{k} \times \mathbf{N} . \sigma - \mathrm{H}(\sigma \mathbf{k}, \mathbf{N})\,.$$

Inoltre, poichè, differenziando la 3ª delle (10), per le (a) si ha:

$$dw = \mathbf{N} \times dP + \sigma\, dP \times (P - O) = [\mathbf{N} + \sigma(P - O)] \times dP\,,$$

differenziando la (12), si ottiene immediatamente:

$$(14)\qquad \frac{d\,\mathrm{Grad}\, \varrho}{dP} = 1 - w\sigma - \mathrm{H}\,\{\mathbf{N} + \sigma(P - O), \mathbf{N}\}\ (^1).$$

Operando con I_1 nelle (13) e (14), si hanno subito le note formule [*Gr.*, n. 6 (13), (21)]:

$$(15)\qquad \mathrm{I}_1 \frac{d\,\mathrm{Grad}\, z}{dP} = \mathrm{div\,Grad}\, z = -\mathbf{k} \times \mathbf{N} . \mathrm{I}_1 \sigma\,, \quad \text{(di Beltrami)},$$

$$(16)\qquad \mathrm{I}_1 \frac{d\,\mathrm{Grad}\, \varrho}{dP} = \mathrm{div\,Grad}\, \varrho = 2 - w . \mathrm{I}_1 \sigma\,.$$

Se operiamo invece con I_2, si ha:

$$(17)\qquad \mathrm{I}_2 \frac{d\,\mathrm{Grad}\, z}{dP} = [1 - (\mathrm{Grad}\, z)^2] . \mathrm{I}_2 \sigma\,,$$

$$(18)\qquad \mathrm{I}_1 \frac{d\,\mathrm{Grad}\, \varrho}{dP} - \mathrm{I}_2 \frac{d\,\mathrm{Grad}\, \varrho}{dP} = 1 + [(\mathrm{Grad}\, \varrho)^2 - 2\varrho] . \mathrm{I}_2 \sigma\ (^2)\,,$$

la cui dimostrazione, sotto forma assoluta, è notevole per la sua semplicità. Basta infatti applicare regole più volte citate, osservando che, per le (11), (12), (10), è

$$(\mathrm{Grad}\, z)^2 = 1 - (\mathbf{k} \times \mathbf{N})^2\ , \quad (\mathrm{Grad}\, \varrho)^2 = 2\varrho + w^2 - 2w^2 = 2\varrho - w^2\,.$$

(1) Per dP sempre normale ad $\mathbf{N}$, il termine $-\mathrm{H}(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ della (14) può essere trascurato; non però quando convenga considerare dP variabile fuori del piano tangente in P. A seconda della forma che si sceglie per la (14), i calcoli seguenti subiscono lievi modificazioni; i risultati coincidono.

(2) Le (15), (16), (17), (18) corrispondono alle ordinarie formule espresse col tachigrafo Δ:

$$\Delta_2 z = -HZ \quad , \quad \Delta_2 \varrho = 2 - wH\,,$$
$$\Delta_{22} z = (1 - \Delta_1 z)\, K \quad , \quad \Delta_2 \varrho - \Delta_{22} \varrho = 1 + (\Delta_1 \varrho - 2\varrho)\, K\,.$$

per ottenere successivamente, dalla (14) (*A. V.*, II, pag. 136 [10]; vol. I, pag. 46 [8]; *Fond.*, n. 5),

$$\mathrm{I}_2 \frac{d \operatorname{Grad} z}{dP} = (\mathbf{k} \times \mathbf{N})^2 . \mathrm{I}_2 \sigma + \sigma \mathbf{k} \times \mathrm{C}(\mathbf{k} \times \mathbf{N} . \sigma) \mathbf{N}$$
$$= (\mathbf{k} \times \mathbf{N})^2 . \mathrm{I}_2 \sigma = [1 - (\operatorname{Grad} z)^2] . \mathrm{I}_2 \sigma ;$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 \frac{d \operatorname{Grad} \varrho}{dP} &= \mathrm{I}_2(1 - w\sigma) - [\mathbf{N} + \sigma(P - O)] \times \mathrm{C}(1 - w\sigma) \mathbf{N} \\
&= \mathrm{I}_2(1 - w\sigma) - [\mathbf{N} + \sigma(P - O)] \times (2 - w\mathrm{I}_1\sigma) \mathbf{N} \\
&= \mathrm{I}_2(1 - w\sigma) - 2 + w\mathrm{I}_1\sigma = \\
&= 3 - 2w\mathrm{I}_1\sigma + w^2 \mathrm{I}_2\sigma - 2 + w\mathrm{I}_1\sigma \\
&= (2 - w\mathrm{I}_1\sigma) + w^2 \mathrm{I}_2\sigma - 1 = \\
&= \mathrm{I}_1 \frac{d \operatorname{Grad} \varrho}{dP} + [2\varrho - (\operatorname{Grad} \varrho)^2] . \mathrm{I}_2\sigma - 1 .
\end{aligned}$$

Si può infine notare che dalle (13) e (14) risulta subito (*Fond.*, n. 5):

$$\frac{d \operatorname{Grad} z}{dP} \mathbf{N} = 0 \quad , \quad \frac{d \operatorname{Grad} \varrho}{dP} \mathbf{N} = 0 ; \tag{19}$$

le quali, per il n. 4, provano che *tutti e tre gli invarianti di ciascuna delle omografie* $\frac{d \operatorname{Grad} z}{dP}$, $\frac{d \operatorname{Grad} \varrho}{dP}$ *non variano per la flessione della superficie.*

Alcune applicazioni.

7 Nelle semplici formule assolute precedenti sono del tutto scomparse le cinque coordinate ordinarie (x, y, z, u, v), i sei coefficienti (E, F, G, D, D', D'') delle due forme differenziali quadratiche fondamentali $(dP)^2$, $-dP \times d\mathbf{N}$, i simboli di Christoffel, le derivate covarianti, i tachigrafi Δ; sono cioè eliminati gli elementi algebrici, inevitabili intermediarî fra le coordinate (non necessarie) e gli enti geometrici, per lasciare il posto a questi stessi enti e ad operatori pure geometrici, quali sono le omografie vettoriali. Si comprende facilmente che, facendo uso delle formule assolute ora esposte, vengono eliminati i laboriosi e non brevi calcoli che occorrono ordinariamente nelle questioni relative alla flessione [1]. Ma gioverà portarne un esempio.

[1] Si ha così la riprova della potenza di questi metodi assoluti, che non solo hanno apportato, in breve tempo ed in tanti campi, grandi semplificazioni nella deduzione dei risultati classici, o dei risultati nuovi recenti, ma si sono pure dimostrati strumenti efficacissimi per completare tali risultati e stabilirne dei nuovi. Cfr., ad es., Burali-Forti per la *Geometria differenziale*, Marcolongo per l'*Elettrodinamica*, Burgatti per l'*Elasticità*,

Esaminiamo il primo problema di Calò, identico al problema A) di Bianchi [1], indicando con M_0 un punto fisso e con ϱ il semiquadrato della distanza di P_0 da M_0.

Il problema di Calò è individuato dalle condizioni:

$$(\alpha)\qquad (dP)^2 = (dP_0)^2\,,\quad [\mathbf{k}\times(P-O)]^2 = (P_0-M_0)^2\,;$$

e per il problema A) di Bianchi, oltre alle (α), si ha una *terza* condizione che esprime come la normale PM, condotta da P al piano $O|\mathbf{k}$, sia trasportata, con la flessione di S in S_0, nel segmento P_0M_0; cioè $\mathbf{k}$ abbia, rispetto al piano tangente in P, eguale orientamento di $P_0 - M_0$ rispetto al piano tangente in P_0. Ora, che *questa terza condizione sia conseguenza della* (α) *si dimostra subito*, senza risolvere i due problemi e constatare l'identità dei risultati (Bianchi, loc. cit., § 1-11).

Differenziando la seconda delle (α) e dividendo per z (n. 6), si ha:

$$\mathbf{k}\times dP = \frac{P_0 - M_0}{z}\times dP_0\,,$$

la quale, per essere $\mathbf{k}$ e $(P_0 - M_0)/z$ vettori unitarî, e dP, dP_0 vettori di egual modulo [per la 1ª delle (α)], esprime appunto la terza condizione indicata.

8. Si trova pure facilmente l'*equazione differenziale di* S, nell'ipotesi

$$(\beta)\qquad 2\varrho_0 = z^2\,.$$

Scritta perciò la (18) per P_0, ϱ_0; tenuto conto delle (19), (6), (8); ponendo $z^2/2$ al posto di ϱ_0 e P al posto di P_0, ed eliminando $\mathrm{I}_2\sigma = \mathrm{I}_2\sigma_0$ (teorema di Gauss) con la (17), si ha:

$$(\mathrm{I})\qquad \mathrm{I}_1\frac{d(z\ \mathrm{Grad}\ z)}{dP} - \mathrm{I}_2\frac{d(z\ \mathrm{Grad}\ z)}{dP} = 1 - z^2\,\mathrm{I}_2\frac{d\ \mathrm{Grad}\ z}{dP}\,,$$

che è una prima forma assoluta dell'equazione differenziale (di 2° ordine) di S.

Boggio per l'*Idrodinamica*, Bottasso per l'*Astatica*, ecc. E ne risulta ancora quanto sia vacua l'opinione di certo autore, che rivolgendosi di recente ai giovani analisti vettoriali italiani, vuol ridurre il calcolo *omografico assoluto* e le DERIVATE RISPETTO AD UN PUNTO (eterno nodo della questione!) alle funzioni lineari di Hamilton, alle matrici cubiche di Cayley e Sylvester, alle dyadics (e dyads) di Gibbs.

[1] B. Calò, *Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie* [Ann. di matem. (3ª), IV, 1900, pp. 124-130]; L. Bianchi, *Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili* (Rendic. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXVIII, 2° sem. 1914, pp. 1-42).

Osservando che [*A. V.*, I, pag. 77 [4]]

$$\frac{d(z\,\mathrm{Grad}\,z)}{dP} = z\,\frac{d\,\mathrm{Grad}\,z}{dP} + \mathrm{H}(\mathrm{Grad}\,z\,,\ \mathrm{Grad}\,z),$$

e calcolando i due invarianti $\mathrm{I}_1\,,\,\mathrm{I}_2$. la (I) diventa:

$$\text{(II)}\qquad z\,\mathrm{div}\,\mathrm{Grad}\,z + (\mathrm{Grad}\,z)^2 - z\,\mathrm{Grad}\,z \times \mathrm{C}\,\frac{d\,\mathrm{Grad}\,z}{dP}\,\mathrm{Grad}\,z = 1\,,$$

che è un'altra forma dell'equazione differenziale di S.

Ponendo infine, al posto di Grad z, il valore (11), dopo facili riduzioni si ha:

$$\text{(III)}\qquad \mathrm{I}_1\sigma\,.\,(\mathbf{k}\times\mathbf{N})^2 + \mathbf{k}\times\sigma\mathbf{k} + \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{N}}{z} = 0\,,$$

che è appunto la forma assoluta della (22) di Bianchi (loc. cit., pag. 14), la quale, ridotta direttamente, dà

$$-\,\mathrm{I}_1\sigma\,.\,(\mathbf{k}\wedge\mathbf{N})^2 + \mathbf{k}\times\sigma\mathbf{k} + \mathrm{I}_1\sigma + \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{N}}{z} = 0\,,$$

riducibile subito alla (III).

Alla (III) si dà pure facilmente la forma

$$\text{(IV)}\qquad \mathrm{I}_1\sigma - \mathrm{Grad}\,z\times\mathrm{C}\sigma\,\mathrm{Grad}\,z + \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{N}}{z} = 0\,,$$

notevole perchè riduce l'equazione differenziale di S alla forma semplicissima

$$\mathrm{I}_1\sigma + \mathbf{k}\times\mathbf{N}/z = 0\,,$$

quando si ponga come condizione che le linee di livello di S ($z = \mathrm{cost}$) debbano essere assintotiche di S [cfr. *Fond.*, pag. 26 (3)]. Resterà da discutere quando tal condizione è soddisfatta.

9. In modo analogo si trova l'equazione differenziale di S_0, dopo aver provato che

$$\text{(20)}\qquad \mathrm{I}_1\sigma_0 = \mathrm{I}_1\sigma + \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{N}}{z} + \frac{1}{z\mathbf{k}\times\mathbf{N}}\,,$$

formula che si ottiene facilmente senza bisogno di conoscere l'equazione differenziale di S.

Infatti, osservando che $w_0 = (P_0 - M_0)\times\mathbf{N}_0 = z\lambda\mathbf{k}\times\lambda\mathbf{N} = z\mathbf{k}\times\mathbf{N}$, scritta la (16) per $\varrho_0\,,\,P_0$, e fatto il cambiamento precedente, si ha:

$$\mathrm{I}_1\,\frac{d(z\,\mathrm{Grad}\,z)}{dP} = 2 - z\mathbf{k}\times\mathbf{N}\,.\,\mathrm{I}_1\sigma_0\,,$$

e quindi, per formule precedenti,

$$z\mathbf{k}\times\mathbf{N}\,.\,\mathrm{I}_1\sigma_0 = 2 + z\mathbf{k}\times\mathbf{N}\,.\,\mathrm{I}_1\sigma - 1 + (\mathbf{k}\times\mathbf{N})^2,$$

da cui segue subito la (20).

Anche per gli altri problemi di Calò si può subito dimostrare l'identità con i corrispondenti di Bianchi, e si ottengono facilmente le equazioni differenziali di S ed S_0; e non è dubbio che, sviluppando i calcoli, debbano presentarsi, in modo semplice, nuove proprietà. Inoltre, se, rotolando S_0 su S, ad S_0 si collega rigidamente una retta r, le proprietà della congruenza descritta da r devono potersi ottenere, con calcoli semplicissimi, tenendo conto di quanto ha fatto il compianto M. Pieri in uno dei suoi ultimi interessanti lavori [1].

Matematica. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due.* Nota di CARLO ROSATI, presentata dal Socio E. BERTINI [2].

Nella classica rappresentazione di Hurwitz di una corrispondenza algebrica fra i punti di una curva C di genere p, ad ogni corrispondenza **T** viene associato un gruppo di $4p^2$ numeri interi $h_{ik}\, g_{ik}\, \mathrm{H}_{ik}\, \mathrm{G}_{ik}$ $(i, k = 1, 2 \ldots p)$, e le condizioni per l'esistenza di T vengono espresse da p^2 relazioni quadratiche fra i periodi a_{ik} dei p integrali normali di prima specie della curva; i coefficienti di queste, che diremo *relazioni di Hurwitz per la* **T**, sono poi i suddetti interi (*caratteristici* di T).

In un lavoro di prossima pubblicazione ho dato una semplice interpretazione geometrica delle p^2 relazioni di Hurwitz e ne ho tratto alcuni risultati relativi ad una curva C_p di genere p e, in particolare, ad una curva di genere due, dei quali credo opportuno esporre qui l'enunciato.

1. Ad ogni corrispondenza **T**, cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ \mathrm{H}_{ik} & \mathrm{G}_{ik} \end{vmatrix}$, si associ l'omografia *razionale* Ω di un S_{2p-1} definita dalle formule

$$\begin{aligned} \varrho x'_i &= h_{i1}\, x_1 + \cdots + h_{ip}\, x_p + \mathrm{H}_{i1}\, x_{p+1} + \cdots + \mathrm{H}_{ip}\, x_{2p} \\ \varrho x'_{p+i} &= g_{i1}\, x_1 + \cdots + g_{ip}\, x_p + \mathrm{G}_{i1}\, x_{p+1} + \cdots + \mathrm{G}_{ip}\, x_{2p} \quad (i = 1, 2, \ldots p), \end{aligned}$$

e si consideri nello stesso S_{2p-1} l'$\mathrm{S}_{p-1} = \alpha$ intersezione dei p iperpiani che hanno per coordinate i periodi dei p integrali normali di 1ª specie della curva.

Le p^2 relazioni di Hurwitz esprimono allora che l'omografia razionale Ω trasforma in sè lo spazio α.

2. Diciamo *speciale* una corrispondenza che ha per immagine un'omografia singolare. Tali corrispondenze esistono soltanto nel caso in cui la curva

[1] M. Pieri, *Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi* (Rendic. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXIII, 1° sem. 1912, pp. 217-246).

[2] Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1915.