ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Anche per gli altri problemi di Calò si può subito dimostrare l'identità con i corrispondenti di Bianchi, e si ottengono facilmente le equazioni differenziali di S ed S_0; e non è dubbio che, sviluppando i calcoli, debbano presentarsi, in modo semplice, nuove proprietà. Inoltre, se, rotolando S_0 su S, ad S_0 si collega rigidamente una retta r, le proprietà della congruenza descritta da r devono potersi ottenere, con calcoli semplicissimi, tenendo conto di quanto ha fatto il compianto M. Pieri in uno dei suoi ultimi interessanti lavori [1].

Matematica. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due.* Nota di CARLO ROSATI, presentata dal Socio E. BERTINI [2].

Nella classica rappresentazione di Hurwitz di una corrispondenza algebrica fra i punti di una curva C di genere p, ad ogni corrispondenza T viene associato un gruppo di $4p^2$ numeri interi $h_{ik}\, g_{ik}\, \mathrm{H}_{ik}\, \mathrm{G}_{ik}$ $(i\,, k = 1\,, 2 \dots p)$, e le condizioni per l'esistenza di T vengono espresse da p^2 relazioni quadratiche fra i periodi a_{ik} dei p integrali normali di prima specie della curva; i coefficienti di queste, che diremo *relazioni di Hurwitz per la* T, sono poi i suddetti interi (*caratteristici* di T).

In un lavoro di prossima pubblicazione ho dato una semplice interpretazione geometrica delle p^2 relazioni di Hurwitz e ne ho tratto alcuni risultati relativi ad una curva C_p di genere p e, in particolare, ad una curva di genere due, dei quali credo opportuno esporre qui l'enunciato.

1. Ad ogni corrispondenza T, cui spetti il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ \mathrm{H}_{ik} & \mathrm{G}_{ik} \end{vmatrix}$, si associ l'omografia *razionale* Ω di un S_{2p-1} definita dalle formule

$$\begin{aligned} \varrho x'_i &= h_{i1}\, x_1 + \cdots + h_{ip}\, x_p + \mathrm{H}_{i1}\, x_{p+1} + \cdots + \mathrm{H}_{ip}\, x_{2p} \\ \varrho x'_{p+i} &= g_{i1}\, x_1 + \cdots + g_{ip}\, x_p + \mathrm{G}_{i1}\, x_{p+1} + \cdots + \mathrm{G}_{ip}\, x_{2p} \quad (i = 1\,, 2\,, \dots p)\,, \end{aligned}$$

e si consideri nello stesso S_{2p-1} l'$\mathrm{S}_{p-1} = \alpha$ intersezione dei p iperpiani che hanno per coordinate i periodi dei p integrali normali di 1ª specie della curva.

Le p^2 relazioni di Hurwitz esprimono allora che l'omografia razionale Ω trasforma in sè lo spazio α.

2. Diciamo *speciale* una corrispondenza che ha per immagine un'omografia singolare. Tali corrispondenze esistono soltanto nel caso in cui la curva

[1] M. Pieri, *Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi* (Rendic. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXIII, 1° sem. 1912, pp. 217-246).

[2] Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1915.

possegga sistemi regolari di integrali di 1ª specie riducibili. Si dimostra infatti che:

Il determinante $\begin{vmatrix} h & g \\ \mathrm{H} & \mathrm{G} \end{vmatrix}$ *di una corrispondenza* T *ha sempre per caratteristica un numero pari* $2q$. *Quando è* $0 < q < p$, *alla* T *vengono associati due sistemi regolari* ∞^{p-q-1} ∞^{q-1}, *tra loro indipendenti, di integrali di 1ª specie riducibili.*

Gli integrali del primo danno somma costante nei punti del gruppo omologo per la T *di un punto* x, *variabile sulla curva; il secondo è generato dalla somma dei valori che un integrale variabile della curva ha nei punti del gruppo suddetto.*

Inversamente:

Dati due sistemi regolari riducibili complementari, esistono sulla curva corrispondenze speciali, alle quali i sistemi medesimi sono associati.

Il numero delle corrispondenze speciali, di specie p-q, indipendenti, cui sono associati due dati sistemi riducibili complementari ∞^{p-q-1} ∞^{q-1} *non può oltrepassare* $2q^2$.

3. È noto (¹) che il numero base μ della totalità delle corrispondenze di C è uguale alla somma dei numeri μ_1 e μ_2 delle corrispondenze indipendenti che sono rispettivamente *equivalenti* o *residue* delle loro inverse. Diremo *simmetriche* quelle della prima specie, *emisimmetriche* quelle della seconda.

Per caratterizzare le omografie immagini delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche, si consideri in S_{2p-1} il sistema nullo Λ definito dalle formule

$$\sigma\xi_i = -x_{p+i} \qquad \sigma\xi_{p+i} = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p),$$

e si moltiplichi per esso l'omografia Ω immagine di T: nasce una reciprocità razionale $\mathrm{R} = \Omega\Lambda$, trasformante in sè lo spazio α, che diremo pure immagine di T. Orbene:

Le reciprocità immagini delle corrispondenze simmetriche sono sistemi nulli, quelle immagini delle emissimmetriche sono polarità.

Dal che segue facilmente:

I numeri base μ_1 *e* μ_2 *delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche non possono oltrepassare* p^2.

4. I sistemi regolari riducibili associati ad una corrispondenza speciale simm.ª o emisimm.ª sono tali che l'uno di essi resta dall'altro individuato. Sicchè può dirsi che una corrispondenza simm.ª od emisimm.ª speciale di specie p-q *appartiene* ad un sistema regolare riducibile ∞^{q-1}. *Dato, inver-*

(¹) Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Questi Rendiconti, vol. XXII (1913).

samente, un sistema regolare riducibile, ad esso appartengono sempre corrispondenze speciali simmetriche. In ogni caso si ha:

I numeri delle corrispondenze speciali simm.ᵉ ed emisimm.ᵉ indipendenti che appartengono ad un dato sistema regolare riducibile ∞^{q-1} *non possono oltrepassare* q^2.

5. Per le curve C di genere due, ricorrendo alla rappresentazione di Klein dello spazio rigato sopra una quadrica Φ di S_5, e utilizzando alcune proprietà degli spazî fondamentali di una omografia involutoria razionale, si giunge alla determinazione completa dei numeri $\mu_1\,\mu_2$. Chiamando, per brevità, S_{k-1} *di corrispondenze* la totalità delle corrispondenze che dipendono da k corrispondenze indipendenti, si ha:

I numeri base μ_1 *e* μ_2 *delle corrispondenze simm.ᵉ ed emisimm.ᵉ sopra una curva* C *di genere due possono acquistare i valori seguenti*:

1°) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$. *La base è costituita dall'* S_0 *delle corrispondenze a valenza.*

2°) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$. *La base è costituita da un'* S_1 *di corrispondenze simm.ᵉ (ogni corrispondenza sulla curva è allora equivalente alla inversa). L'* S_1, *o non contiene corrispondenze speciali, ovvero contiene due* S_0 *di corrispondenze speciali. Quest'ultimo caso avviene quando la curva possiede due integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

3°) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$. *La base è costituita da un'* S_1 *di corrispondenze simm.ᵉ, contenente due* S_0 *di corrispondenze speciali, e da un* S_0 *di corrispondenze speciali emisimm.ᵉ. La curva possiede, in questo caso, due integrali ellittici, dei quali uno è a moltiplicazione complessa.*

4°) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$. *La base è costituita da un'* S_1 *di corrispondenze simm.ᵉ e da un'* S_1 *di emisimm.ᵉ. I due* S_1, *o non contengono corrispondenze speciali, ovvero contengono ciascuno due* S_0 *di corrispondenze speciali. Quest'ultimo caso avviene quando la curva possiede due integrali ellittici, entrambi a moltiplicazione complessa.*

5°) $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$. *La base è costituita da un'* S_2 *di corrispondenze simm.ᵉ e da un'* S_0 *di emisimm.ᵉ non speciali. L'* S_2 *delle corrispondenze simm.ᵉ, o non contiene corrispondenze speciali, ovvero contiene infiniti* S_0 *di corrispondenze speciali. Quest'ultimo caso avviene, se la curvapos siede infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

6°) $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 4$. *La base è costituita da un'* S_3 *di corrispondenze simm.ᵉ e da un'* S_3 *di emisimm.ᵉ. Tanto l'uno che l'altro dei due* S_3 *contengono infiniti* S_0 *di eorrispondenze speciali, e la curva possiede infiniti integrali ellittici tutti a moltiplicazione complessa.*

Osservazione. Poichè dall'ipotesi $\mu_1 = 1$ discende $\mu_2 = 0$, abbiamo il risultato:

Sopra una curva di genere due, priva di corrispondenze singolari simmetriche, ogni corrispondenza è dotata di valenza.