ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulla risolubilità dell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. Mi ero proposto la ricerca di una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie, che fosse indipendente dalla conoscenza degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni del nucleo dell'equazione data. Tale ricerca però non mi era riuscita se non in due casi particolari, i quali si trovano esposti in due Note pubblicate in questi Rendiconti [2].

Qui ci proponiamo di esporre una nuova condizione più larga, che abbraccia le precedenti come casi particolari; la quale, se da un lato non permette di affermare che la ricerca propostaci sia completamente esaurita, rappresenta però, dall'altro, un passo in avanti.

Per brevità, indicheremo con K e K_n rispettivamente i nuclei $K(st)$ e

$$K_n(st) = \int_a^b K_{n-j}(sr)\, K_j(rt)\, dr \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots n-1)$$

nei casi in cui tale notazione non può generare equivoci.

2. Abbiasi l'equazione di 1ª specie, a nucleo qualunque purchè integrabile e finito,

$$g(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt\,. \tag{1}$$

Consideriamo l'identità, scritta con notazione abbreviata,

$$K_3(K_2^2 - K K_3) = K_2(K_2 K_3 - K K_4) + K(K_2 K_4 - K_3^2)\,; \tag{2}$$

e supponiamo che la differenza

$$K_2^2 - K K_3 \tag{3}$$

non sia identicamente nulla; cioè non si annulli che per un numero finito di coppie di valori per s e t.

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1915.

[2] Vergerio, *Sull'equazione integrale di 1ª specie*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta dell'8 novembre 1914; *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie*, ibid., seduta del 6 giugno 1915.

Potremo allora asserire che l'uguaglianza

$$(4) \qquad K_3 = \frac{K_2 K_3 - K K_4}{K_2^2 - K K_3} K_2 + \frac{K_2 K_4 - K_3^2}{K_2^2 - K K_3} K ,$$

ottenuta dividendo i membri della (2) per la differenza (3), sussisterà per tutte le coppie di valori delle variabili s e t, eccettuate tutt'al più quelle coppie eventuali che annullano il denominatore comune dei due rapporti.

3. Ciò premesso, suppongasi che i due rapporti si riducano a due costanti (finite), che indicheremo rispettivamente con α e β; e che queste siano ambedue diverse da zero [1].

La (4) allora si può mettere sotto la forma:

$$(5) \qquad K_3(st) = \alpha K_2(st) + \beta K(st) ,$$

da cui si ha

$$K(st) = \frac{1}{\beta} K_3(st) - \frac{\alpha}{\beta} K_2(st).$$

Supponiamo che la (1) ammetta la soluzione $h(t)$. Allora, moltiplicando i membri della precedente uguaglianza per $h(t)\,dt$ ed integrando, dovrà necessariamente aversi

$$(6) \qquad g(s) = \frac{1}{\beta} g_2(s) - \frac{\alpha}{\beta} g_1(s) .$$

La (6) è quindi condizione *necessaria*; essa è poi anche *sufficiente*. Infatti alla (6) può darsi la forma

$$g(s) = \int_a^b K(st) \left[\frac{1}{\beta} g_1(t) - \frac{\alpha}{\beta} g(t) \right] dt ,$$

dalla quale si deduce che la (1) ammette la soluzione

$$(7) \qquad h(t) = \frac{1}{\beta} g_1(t) - \frac{\alpha}{\beta} g(t) .$$

Possiamo quindi affermare che, *se i rapporti*

$$\frac{K_2 K_3 - K K_4}{K_2^2 - K K_3} \quad ; \quad \frac{K_2 K_4 - K_3^2}{K_2^2 - K K_3}$$

si riducono a due costanti finite e non nulle [2] α *e* β, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *ammetta soluzione è che la* $g(s)$ *si*

[1] Affinchè nessuna delle costanti α, β sia nulla, è *necessario* che le costanti γ_n, relative a $K(st)$, non siano tutte eguali tra loro.

[2] Se una delle due costanti α e β è nulla, le costanti γ_n sono tutte eguali tra loro; ricadiamo perciò nel caso considerato nella seconda delle Note citate.

possa ammettere sotto la forma (6); *in tale caso, la* (7) *sarà una soluzione dell'equazione data.*

4. Il teorema continua evidentemente a sussistere anche se α e β sono funzioni della sola s. Esso poi si estende facilmente al caso in cui il nucleo $K(st)$ sia esprimibile linearmente mediante un numero finito p di nuclei iterati: si possa cioè mettere sotto la forma:

$$K = a_2 K_2 + a_3 K_3 + \cdots + a_p K_p , \tag{8}$$

dove le a sono delle costanti, o tutt'al più delle funzioni della sola s.

Il teorema perciò è senz'altro estensibile ai nuclei elementari

$$\sum_{r=1}^{n} \varphi_r(s)\, \psi_r(t)$$

pei quali, com'è noto [1], esiste sempre un numero p tale, che ogni nucleo iterato d'ordine $\geq p$, è una combinazione lineare a coefficienti costanti, dei nuclei $K_2, K_3, \ldots K_{p-1}$ e può porsi quindi sotto la forma (8).

5. È degno di nota il fatto che, se $K(st)$ soddisfa alle condizioni per esso poste al n. 3, l'equazione

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt$$

non può sussistere che per tutt'al più due soli valori di λ.

Moltiplicando invero ambo i membri della (5) per $\varphi(t)\, dt$ ed integrando, si ha:

$$\frac{\varphi(s)}{\lambda^3} = \alpha \frac{\varphi(s)}{\lambda^2} + \beta \frac{\varphi(s)}{\lambda} ,$$

cioè

$$\beta\lambda^2 + \alpha\lambda - 1 = 0 ;$$

λ quindi non può assumere più di due valori distinti.

Nel caso che $K(st)$ sia un nucleo simmetrico, uno di questi due valori dovrà necessariamente essere l'uno dei due seguenti: $\frac{+1}{\sqrt{\gamma}}, \frac{-1}{\sqrt{\gamma}}$; essendo,

[1] L. Sinigallia, *Sulle funzioni permutabili di seconda specie*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 15 dicembre 1912.

com'è noto, $\left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ il minimo modulo degli autovalori di un nucleo simmetrico [1].

6. Una proprietà, del tutto analoga alla precedente, è posseduta dai nuclei simmetrici le cui costanti γ_n siano tutte eguali tra loro.

Infatti, se λ è un autovalore e $\varphi(s)$ una corrispondente autofunzione di un tale nucleo, sarà

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\, \varphi(t)\, dt\,; \tag{9}$$

dalla quale, mediante moltiplicazione per $\mathrm{K}(sr)\, dr$ ed integrazione, dopo aver cambiato in essa s in r, si ottiene

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b \mathrm{K}_2(st)\, \varphi(t)\, dt$$

$$\varphi(s) = \lambda^3 \int_a^b \mathrm{K}_3(st)\, \varphi(t)\, dt\,.$$

E poichè $\frac{\mathrm{K}_3(st)}{\gamma} = \mathrm{K}(st)$ [2], l'ultima uguaglianza potrà scriversi:

$$\varphi(s) = \lambda^3 \gamma \int_a^b \mathrm{K}(st)\, \varphi(t)\,;$$

la quale, confrontata colla (9), ci dà

$$\lambda^2 \gamma = 1\,.$$

Gli autovalori di $\mathrm{K}(st)$, dovendo soddisfare a la precedente uguaglianza, non potranno essere dunque diversi da $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

7. Vogliamo da ultimo mostrare come, nel caso di $\mathrm{K}(st)$ simmetrico, si possa con facilità conoscere il valore della costante $\gamma = \lim_{n=\infty} \gamma_n$, la cui ricerca riesce molto lunga e laboriosa, anche nei casi [come il seguente: $\mathrm{K}(st) = s + t$] in cui il nucleo ha forma semplicissima, quando ci si voglia servire della conoscenza dei valori delle γ_n.

[1] Si sa, infatti, che

$$\lambda^2 = \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{U}_{2n}}{\mathrm{U}_{2n+2}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{\gamma}$$

è il minimo autovalore del nucleo $\mathrm{K}_2(st)$ e che quindi $\left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ sarà quello di $\mathrm{K}(st)$, in valore assoluto. Cfr. Vivanti, *Sui nuclei simmetrizzabili*, Rend. del R. Ist. lomb. di scienze e lettere, vol. XLVIII, fasc. 2-3, nota a pp. 121-122.

[2] Cfr. la seconda delle Note citate.

A tale scopo, ci proponiamo di mostrare la relazione molto semplice, che lega tra loro le costanti α, β e γ.

Riprendiamo la relazione

$$K_3(st) = \alpha K_2(st) + \beta K(st);$$

e, dopo aver in essa mutato s in r, moltiplichiamone i membri per $K_{n-1}(sr)$ ed integriamo da a a b. Otterremo

$$K_{n-2}(st) = \alpha K_{n-1}(st) + \beta K_n(st),$$

ed anche

$$K_{n+2}(st) - \beta K_n(st) = \alpha K_{n+1}(st).$$

Si elevi al quadrato e si eseguisca la doppia integrazione, rispetto alle due variabili s e t.

Ricordando che

$$\int_a^b\int_a^b K_{n+2}(st)\, K_n(st)\, ds\, dt = \int_a^b\int_a^b K_n(st)\, ds\, dt \int_a^b K_{n+1}(sr)\, K(rt)\, dr =$$

$$= \int_a^b\int_a^b K_{n+1}(sr)\, ds\, dr \int_a^b K_n(st)\, K(rt)\, dt =$$

$$= \int_a^b\int_a^b [K_{n+1}(sr)]^2\, ds\, dr = U_{2n+2},$$

avremo

$$U_{2n+4} - 2\beta\, U_{2n+2} + \beta^2\, U_{2n} = \alpha^2\, U_{2n+2}.$$

Ed ancora, dividendo ambo i membri per U_{2n} e tenendo presente l'uguaglianza $\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \gamma_n$,

$$\gamma_n\, \gamma_{n+1} - 2\beta\, \gamma_n + \beta^2 = \alpha^2\, \gamma_n.$$

Infine passando al limite per $n = \infty$, si ha

$$\gamma^2 - (\alpha^2 + 2\beta)\, \gamma + \beta^2 = 0,$$

che è la relazione cercata; dalla quale si ricava

$$\gamma = \frac{\alpha + 2\beta \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

dove bisognerà naturalmente prendere quello dei due segni $\pm$ che rende positivo γ.

Nel caso, poi, che si avessero due valori positivi, per discernere quale dei due dev'essere scelto basta ricordare che, nel nostro caso, deve sussistere la relazione

$$U_2 > \gamma > \gamma_1.$$

Infatti dovendo, in ogni caso, aversi [1]

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{\gamma^n} = U \geq 1 \quad ; \quad \frac{U_{2n+2}}{\gamma^{n+1}} \leq \frac{U_{2n}}{\gamma^n} ,$$

dovrà essere

$$U_2 \geq \gamma .$$

Il segno di uguaglianza però, nel nostro caso, dev'essere escluso.

Invero, se fosse $U_2 = \gamma$, dovrebbe essere, qualunque sia n, $U_{2n} = \gamma^n$; e, per conseguenza, le costanti $\gamma_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$ dovrebbero essere tutte eguali tra loro. Ora ciò non è possibile, perchè allora sarebbe

$$\frac{K_3(st)}{\gamma} = K(st) ;$$

cioè $\alpha = 0$, contro il supposto.

Analogamente, dovendo essere $\gamma_{n-1} \leq \gamma_n$, sarà necessariamente $\gamma_1 < \gamma$.

Fisica. — *Dispositivo semplice per la radiostereoscopia* [2]. Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Socio V. Volterra [3].

È noto che, fra i varî metodi proposti per la ricerca di elementi estranei nell'interno del corpo umano per mezzo dei raggi X, è di indiscutibile efficacia la *stereoradiografia*, ma le operazioni necessarie per ottenerla, non sono così rapide come servirebbe in certi casi urgenti per cui sarebbe utile potervi supplire qualche volta con la *stereoradioscopia*.

Gli apparecchi complicati e costosi finora necessarî per ottenere la stereoscopia allo schermo fluorescente ne hanno talmente impedito la diffusione che, a quanto mi risulta, pochi dei nostri radiologi ne conoscono l'esistenza e forse nessuno l'ha veduta realizzata.

Avendo ottenuto ottimi risultati con un dispositivo molto semplice ne propongo l'uso, ritenendo che con esso potrà essere messo a portata di tutti un mezzo di studio assai utile.

Si immaginino (fig. 1) due rocchetti poco differenti i cui primarî R_1 ed R_2 siano disposti in parallelo e alimentati da corrente alternata in X, Y. In ciascuno dei due circuiti sia inserito un interruttore sincrono elettrolitico [4],

[1] Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgerschriebener*. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905, § 11.

[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio fisico dell'Istituto De Merode in Roma.

[3] Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1915.

[4] Ved. Rend. Accad. Lincei, 2° sem. (1915).