ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

***pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sopra una classe di sistemi n^{pli} ortogonali.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI (¹).

1. Nella Nota inserita nel fascicolo 10° (1° semestre 1915) di questi Rendiconti (²), ho considerato una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali dello spazio ordinario, che dipende in modo singolare dalle superficie pseudosferiche. Dimostro, ora, che esistono nello spazio S_n euclideo, ad n dimensioni ($n \geq 3$), sistemi n^{pli} di ipersuperficie ortogonali, che ne costituiscono la naturale generalizzazione. La loro ricerca dipende essenzialmente dalla integrazione di un sistema differenziale [sistema (C), n. 3], che offre un notevole esempio di sistemi lineari canonici, completamente integrabili, del Bourlet.

Per maggiore chiarezza, ricordiamo le formole fondamentali pei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n euclideo ad n dimensioni (³).

Il quadrato dell'elemento lineare ds dello spazio, riferito al sistema n^{plo} ortogonale $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, assuma la forma

$$(1)\quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \cdots + H_n^2\, du_n^2 ,$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ indicano le coordinate cartesiane ortogonali del punto

(¹) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1915.

(²) *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali* (seduta del 16 maggio 1915).

(³) Ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, livre II, chap. I (2ème édition, 1910).

variabile. Le condizioni perchè questo ds^2 appartenga all'S_n euclideo, date dall'annullarsi dei simboli riemanniani a quattro indici per la forma differenziale $\sum_i H_i^2\, du_i^2$, aquistano, colla introduzione delle $n(n-1)$ rotazioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k),$$

la forma seguente:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} & (i \neq k \neq l) \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_h} = - \sum\limits_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k}. \end{cases}$$

Qui, nelle formole della prima linea, bisogna far percorrere ad (i, k, l) tutte le terne di indici *diversi* prese fra $1, 2, 3, \dots, n$; e nelle (A_2) il simbolo sommatorio

$$\sum_{\lambda}^{(i,k)}$$

sta ad indicare che l'indice variabile λ assume tutti i valori da *1* a n, *con esclusione dei due valori particolari* i, k.

Ad ogni sistema (β_{ik}), integrale delle (A), corrispondono infiniti sistemi n^{pli} ortogonali (paralleli). Ciascuno di questi è individuato da un sistema di valori di $(H_1, H_2, \dots H_n)$, assoggettati soltanto a soddisfare alle equazioni differenziali

$$(B) \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, H_k \qquad (i \neq k),$$

le cui condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte, a causa delle (A) della prima linea, talchè l'integrale generale $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ dipende da *n funzioni arbitrarie*, potendosi assegnare ad arbitrio la funzione della u_i (variabile parametrica) a cui si riduce la H_i quando le rimanenti variabili (principali) assumono valori iniziali dati $u_k^{(0)}$.

2. Tutti gli infiniti sistemi n^{pli} ortogonali, corrispondenti alle medesime rotazioni β_{ik}, hanno a comune, in ogni punto $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dello spazio, l'orientazione dell'n^{edro} principale, i cui coseni di direzione degli spigoli sono dati dalle formole

$$X_i^{(r)} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_r}{\partial u_i},$$

l'indice inferiore i riferendosi allo spigolo (u_i), il superiore r all'asse (x_r) a cui è relativo.

Questi coseni di direzione, indipendentemente dall'indice superiore r che omettiamo nella scrittura, soddisfano al sistema di equazioni ai differenziali totali ([1]):

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u_i} = -\sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda . \end{cases}$$

Queste, note le β_{ik} in funzione delle u, determinano perfettamente gli n^2 coseni $X_i^{(r)}$, *a meno di una sostituzione ortogonale a coefficienti costanti*, cioè a meno di una rotazione nell' S_n.

Scelto un qualunque sistema integrale $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ delle (B), resta determinato per quadrature (a meno di una traslazione) il corrispondente sistema n^{plo} ortogonale dalle formole

$$(2)\qquad \frac{\partial x_r}{\partial u_i} = H_i X_i^{(r)} \qquad (i, r = 1, 1, \ldots, n).$$

Introduciamo ora, insieme colle n funzioni H_i, le altre

$$W_1, W_2, \ldots, W_n,$$

che dànno le distanze (algebriche) dell'origine dalle n facce dell' n^{edro} principale, cioè

$$(3)\qquad W_i = \sum_r x_r X_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

In virtù delle (a), queste soddisfano al sistema di equazioni a derivate parziali

$$(B^\star)\qquad \frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k),$$

che diciamo *l'aggiunto* del sistema (B).

Viceversa, se le $W_1, W_2, \ldots, W_n$ soddisfano alle $(B^\star)$, resta determinato dalle (3) un sistema n^{plo} ortogonale corrispondente, che si ha, *in termini finiti*, colle formole

$$(4)\qquad x_r = \sum_i W_i X_i^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

([1]) Le equazioni (a) sono, sotto altra forma, le equazioni differenziali di Christoffel

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_l},$$

che risultano dall'equivalenza delle due forme differenziali (1).

E invero, derivando le (4) rispetto ad u_k, coll'osservare le (a) e le (B*), si trova subito

$$\frac{\partial x_r}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial W_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} W_\lambda\right) \cdot X_k^{(r)} ,$$

formola che pone in evidenza il sistema n^{plo} ortogonale, coi seguenti valori h_i per le H_i:

$$h_i = \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{5}$$

3. Ricordate queste generalità dalla teoria dei sistemi n^{pli} ortogonali, veniamo all'oggetto proprio della presente Nota.

Indichino $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n costanti arbitrarie, che qui, per evitare la suddistinzione di molti casi particolari, supponiamo *tutte diverse da zero e fra loro diseguali*, e domandiamo:

Esistono sistemi n^{pli} ortogonali, nei quali $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *siano legate dalla relazione quadratica*

$$c_1 W_1^2 + c_2 W_2^2 + \cdots + c_n W_n^2 = \text{cost} \, ? \tag{I}$$

Il problema proposto consiste nel ricercare se esistono $n(n-1)+n=n^2$ funzioni delle u

$$\beta_{ik} \quad , \quad W_i ,$$

che insieme soddisfino alle equazioni differenziali (A), (B*), ed all'equazione in termini finiti (I). È facile l'eliminare di qui le W_i e formare un nuovo sistema di equazioni differenziali per le β_{ik}, che dovremo aggregare alle (A). Per ciò deriviamo la (I) rispetto ad una qualunque u_i, e, osservando le (B*), avremo

$$W_i \left\{ c_i \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} W_\lambda \right\} = 0 .$$

Escludendo senz'altro i casi più ovvii, e di facile trattazione, nei quali qualcuna delle W_i si annulli, deduciamo dalla precedente:

$$c_i \frac{\partial W_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{6}$$

Confrontando questa colla (B*)

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k) ,$$

costruiamo la corrispondente condizione d'integrabilità

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} W_k) + \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{\lambda i} W_\lambda) = 0 .$$

Indicando con Ω il primo membro, e sviluppando colle (B^*), abbiamo

$$\Omega = c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} W_k + c_i \beta_{ik} \beta_{ki} W_i + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{\lambda i} W_\lambda) + c_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} W_k);$$

ed osservando le (A), le (B^*) e la (6), troveremo

$$\Omega = W_k \left\{ c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} \right\} +$$
$$+ c_i \beta_{ik} \beta_{ki} W_i + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} \beta_{ki} W_\lambda - \beta_{ki} \sum_\lambda^{(k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} W_\lambda .$$

Gli ultimi tre termini si distruggono e, poichè supponiamo $W_k \neq 0$, restano le equazioni nelle sole (β_{ik})

$$c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = - \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} ,$$

che dobbiamo aggregare alle (A_2)

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = - \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} .$$

Di qui, risolvendo rapporto alle due derivate, risultano le formole

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k}$$

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_i}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} ,$$

la seconda delle quali non è che la prima, scambiato i con k. Concludiamo adunque:

In ogni sistema n^{plo} ortogonale, nel quale $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *siano legate dall'equazione quadratica* (I), *le* $n(n-1)$ *rotazioni* β_{ik} *debbono soddisfare al seguente sistema di* $2n(n-1)$ *equazioni a derivate parziali,*

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l) \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} , \end{aligned} \right.$$

che include in particolare il sistema (A).

4. La prima questione che ora si presenta è quella di esaminare la compatibilità delle $2n(n-1)$ equazioni (C) nelle $n(n-1)$ funzioni incognite β_{ik}, e di valutare il grado di arbitrarietà dell'integrale generale.

Si osservi che, nel sistema (C), di una qualunque delle incognite β_{ik} sono assegnate *tutte* le derivate prime, in funzione omogenea quadratica delle incognite, *fatta eccezione della derivata* $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}$ che non vi figura. Per ciò, per la funzione incognita β_{ik} la variabile u_k è parametrica; le altre $n-1$ sono principali. Le condizioni d'integrabilità per le (C) saranno identicamente soddisfatte se i *due* valori tratti dalle (C) per una medesima derivata seconda principale coincidono, in virtù delle (C) stesse. Ma per due derivate seconde

$$\frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_l \, \partial u_m}\,, \qquad \frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_m \, \partial u_l}\,,$$

dove l, m siano indici diversi fra loro e da i, k, la coincidenza segue già dalle (C) della prima linea. Resta dunque da verificarsi che, per le (C) stesse, si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il}\,\beta_{lk}) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} + \frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k}) = 0\,.$$

Indicando con Θ il primo membro, possiamo scrivere

$$\Theta = \beta_{lk}\frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i} + \beta_{il}\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k}) + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{li}\,\beta_{lk})\,;$$

ed eseguendo colle (C) stesse, e ordinando opportunamente i termini,

$$\begin{aligned}\Theta = \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\beta_{\lambda l}\,\beta_{li}\,\beta_{\lambda k} + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k}\beta_{li}\sum_{\lambda}^{(k,l)}\frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_l}\beta_{\lambda l}\,\beta_{\lambda k} + \beta_{il}\,\beta_{li}\,\beta_{ik} + \\ + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)}\frac{c_\lambda - c_k}{c_i - c_k}\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda l}\,\beta_{lk} + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k}\sum_{\lambda}^{(i,l)}\frac{c_\lambda - c_i}{c_i - c_l}\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda l}\,\beta_{lk} + \\ + \sum_{\lambda}^{(i,l)}\frac{c_\lambda - c_l}{c_l - c_i}\beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda l}\,\beta_{lk}\,.\end{aligned}$$

I tre primi termini manifestamente si distruggono: ma anche gli ultimi tre si elidono, a causa della identità

$$(c_\lambda - c_i)(c_l - c_k) + (c_\lambda - c_l)(c_k - c_i) = (c_\lambda - c_k)(c_l - c_i)\,,$$

onde segue effettivamente $\Theta = 0$. Concludiamo che il sistema lineare canonico (C) è *completamente integrabile*. Se scegliamo adunque un sistema iniziale di valori per le variabili u_i [sia per semplicità il sistema $(0, 0, \dots, 0)$], sarà determinato univocamente un sistema integrale (β_{ik}) delle (C) prescrivendo che la rotazione β_{ik} si riduca ad una funzione arbitraria data della sua variabile parametrica u_k, quando le altre variabili (principali) si annullano. Sembra, così, che l'integrale generale delle (C) dipenda da $n(n-1)$

funzioni arbitrarie, quante sono le incognite β_{ik}. Però, di queste funzioni arbitrarie, n sono soltanto apparenti, dipendendo dall'arbitrarietà ancora lasciata ai parametri u_i; in realtà adunque:

L'integrale generale (β_{ik}) *del sistema* (C) *dipende da* $n(n-2)$ *funzioni arbitrarie essenziali.*

5. Una proprietà notevole del sistema differenziale (C) è questa: che *esso possiede* n *integrali quadratici nelle rotazioni.*

Si considerino infatti le n espressioni quadratiche nelle β

$$\Omega_k = \sum_{\lambda}^{(k)} (c_\lambda - c_k)\, \beta_{\lambda k}^2 \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Se si deriva Ω_k rispetto ad una qualunque u_i, *diversa da* u_k, si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_k}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} (c_\lambda - c_k)\, \beta_{\lambda k} \frac{\partial \beta_{\lambda k}}{\partial u_i} + (c_i - c_k)\, \beta_{ik} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i},$$

ossia, per le (C),

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_k}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} (c_\lambda - c_k)\, \beta_{\lambda k}\, \beta_{\lambda i}\, \beta_{ik} + (c_i - c_k)\, \beta_{ik} \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i}\, \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k},$$

espressione che identicamente si annulla. Ne segue che la Ω_k è una funzione della sola u_k; e poichè, cangiando il parametro u_k, tutte le $\beta_{\lambda k}$ si moltiplicano per un medesimo fattore, funzione arbitraria di u_k, e quindi Ω_k pel suo quadrato, ne risulta che possiamo disporre del parametro u_k così da ridurre Ω_k ad una costante. Ne concludiamo quindi:

Il sistema differenziale (C), scelti convenientemente i parametri $u_1, u_2, \dots, u_n$, possiede gli n integrali quadratici

$$\left\{\begin{array}{l} (c_2 - c_1)\, \beta_{21}^2 + (c_3 - c_1)\, \beta_{31}^2 + \cdots + (c_n - c_1)\, \beta_{n1}^2 = \text{cost} \\ (c_1 - c_2)\, \beta_{12}^2 + (c_3 - c_2)\, \beta_{32}^2 + \cdots + (c_n - c_2)\, \beta_{n2}^2 = \text{cost} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (c_1 - c_n)\, \beta_{1n}^2 + (c_2 - c_n)\, \beta_{2n}^2 + \cdots + (c_{n-1} - c_n)\, \beta_{n-1}^2, \qquad = \text{cost}. \end{array}\right.$$

6. Supponiamo scelto per le rotazioni (β_{ik}) un qualunque sistema integrale delle (C). È facile vedere che esisteranno in effetto (infiniti) sistemi n^{pli} ortogonali con queste rotazioni, e soddisfacenti alla condizione (I). Per determinarli, dovremo associare alle (B*) le equazioni (6), e formeremo così il sistema

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \\[2mm] \dfrac{\partial W_i}{\partial u_i} = -\displaystyle\sum_{\lambda}^{(i)} \frac{c_\lambda}{c_i}\, \beta_{\lambda i} W_\lambda . \end{array}\right.$$

Questo è un sistema lineare ai differenziali totali per le funzioni incognite $W_1, W_2, \ldots, W_n$, e dal calcolo stesso eseguito al n. 3 risulta che esso è completamente integrabile. D'altra parte, se poniamo per un momento

$$\Phi = c_1 W_1^2 + c_2 W_2^2 + \cdots + c_n W_n^2 ,$$

subito vediamo che, a causa delle (II), tutte le derivate di Φ si annullano, e però Φ è una costante. Scelto adunque un qualunque sistema $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ integrale delle (II), sarà verificata la condizione (I), e le formole (4) daranno il sistema n^{plo} ortogonale corrispondente. In questo sistema i valori h_i delle H_i si calcoleranno, secondo le (5) e per le (II_2), dalle formole

$$h_i = \sum_{\lambda}^{(i)} \frac{c_i - c_\lambda}{c_i} \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{7}$$

Così, ad ogni sistema (β_{ik}) di rotazioni che soddisfino alle (C), corrispondono infiniti sistemi n^{pli} ortogonali colle W_i legate dalla relazione quadratica (I). E qui è ancora da osservarsi che, figurando nel sistema (C) solo le differenze $c_i - c_k$, *si possono alterare le n costanti c_i di una medesima costante additiva, senza che varii l'immagine ipersferica del sistema.*

7. Rispetto alla integrazione del sistema differenziale (C), poco apprendono i metodi generali. Ma, in grazia del suo significato geometrico, possiano facilmente riconoscere che: *noto un sistema particolare (β_{ik}) di soluzioni delle* (C), *potremo trovarne infiniti nuovi integrando equazioni differenziali ordinarie.*

Per questo si supponga che le n costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ non abbiano tutte lo stesso segno, ciò che possiamo sempre ottenere alterandole, secondo l'osservazione superiore, di una medesima costante additiva. Si considerino allora quei particolari sistemi n^{pli} ortogonali nei quali è soddisfatta la condizione (I), annullandosi la costante del secondo membro

$$c_1 W_1^2 + c_2 W_2^2 + \cdots - c_n W_n^2 = 0 . \tag{8}$$

Indicando questi come sistemi (Σ), dimostriamo:

Se si assoggetta un tale sistema (Σ) ad un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine, il sistema n^{plo} derivato $(\overline{\Sigma})$ appartiene alla medesima classe.

Prendendo per semplicità $= 1$ il raggio dell'ipersfera d'inversione, le formole d'inversione sono

$$\overline{x}_r = \frac{x_r}{\varrho} ,$$

dove si è posto

$$\varrho = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2 .$$

Derivando rapporto ad u_i, coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u_i} = 2 \sum_\lambda x_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} = 2h_i \sum_\lambda x_\lambda X_i^{(\lambda)} = 2h_i W_i ,$$

risulta

$$\frac{\partial \overline{x}_r}{\partial u_i} = \frac{h_i}{\varrho}\left(X_i^{(r)} - \frac{2x_r W_i}{\varrho}\right).$$

Queste formole dimostrano che i valori $\overline{X}_i^{(r)}$ dei coseni di direzione per il sistema derivato sono

$$\overline{X}_i^{(r)} = X_i^{(r)} - \frac{2x_r W_i}{\varrho} ,$$

ed i nuovi valori delle H_i

$$\overline{h}_i = \frac{h_i}{\varrho} .$$

Indicando con $\overline{W}_i$ le quantità analoghe alle W_i, abbiamo subito, dalle precedenti,

$$\overline{W}_i = -\frac{W_i}{\varrho} \tag{9}$$

Di qui segue appunto che la relazione (8) per le W_i si traduce nell'analoga per le $\overline{W}_i$, c. d. d.

Inoltre, derivando la (9) rispetto ad u_k, abbiamo

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial u_k} = -\frac{1}{\varrho} \beta_{ik} W_k + \frac{2W_i h_k}{\varrho^2} W_k ,$$

cioè

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial u_k} = \left(\beta_{ik} - \frac{2W_i h_k}{\varrho}\right) \overline{W}_k ,$$

onde deduciamo che le rotazioni $\overline{\beta}_{ik}$ pel sistema derivato $(\overline{\Sigma})$ sono

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2W_i h_k}{\varrho} ,$$

ovvero anche, per le (7),

$$\overline{\beta}_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2W_i}{\sum_\lambda W_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda^{(k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_k} \beta_{\lambda k} W_\lambda . \tag{10}$$

Dunque: *noto un sistema* (β_{ik}) *di soluzioni delle* (C), *se ne ottengono infiniti nuovi dalle formole* (10), *ponendovi per le* W_i *un sistema di soluzioni del sistema di equazioni* (II) *ai differenziali totali, soddisfacenti alla condizione iniziale* (8).

8. Supponiamo ora, al contrario, che le costanti c_i abbiano tutte il medesimo segno: per es. il positivo, ciò che possiamo ottenere aumentandole tutte di una stessa costante (n. 6). Allora, se nelle (C) facciamo il cangiamento *reale* di funzioni incognite

$$\beta_{ik} = \sqrt{\frac{c_k}{c_i}}\, \beta'_{ik}, \tag{11}$$

le (C) si cangiano nelle altre

$$(\mathrm{C}')\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_l} = \beta'_{il}\, \beta'_{lk} \\ &\frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\dfrac{1}{c_\lambda} - \dfrac{1}{c_k}}{\dfrac{1}{c_k} - \dfrac{1}{c_i}}\, \beta'_{\lambda i}\, \beta'_{\lambda k}, \end{aligned} \right.$$

che sono le (C) stesse ove si cangino le c_i nelle loro inverse $\frac{1}{c_i}$. Le formole (11) dànno il passaggio dalle soluzioni (β_{ik}) del sistema (C) a corrispondenti (β'_{ik}) del sistema (C'), e viceversa.

Alla considerazione dei sistemi n^{pli} ortogonali (Σ) che verificano la (I),

$$\sum_i c_i \mathrm{W}_i^2 = \text{cost}, \tag{12}$$

conviene quindi associare quelli dei sistemi (Σ') che verificano l'altra

$$\sum_i \frac{\mathrm{W}'^2_i}{c_i} = \text{cost}. \tag{12'}$$

Quando siano noti i valori dei coseni X_i relativi alle rotazioni (β_{ik}), e così quelli X'_i per le rotazioni (β'_{ik}), è facile vedere che si avranno senza altro, *in termini finiti*, i sistemi (Σ) corrispondenti alla (12), e quelli (Σ') corrispondenti alla (12'). E infatti, se nelle equazioni differenziali (II) poniamo

$$\mathrm{W}_i = \frac{\mathrm{X}'_i}{\sqrt{c_i}},$$

queste diventano

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{X}'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\, \mathrm{X}'_k \\ &\frac{\partial \mathrm{X}'_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{\lambda i}\, \mathrm{X}'_\lambda, \end{aligned} \right.$$

che sono precisamente le equazioni differenziali (a) per le X'_i. Similmente, ponendo

$$\mathrm{W}'_i = \sqrt{c_i}\, \mathrm{X}_i,$$

si identificano le (II) per le W'_i colle (a) per le X_i.

9. Supposto ora soltanto che le rotazioni β_{ik} soddisfano alle (C), consideriamo tutti gli infiniti sistemi n^{pli} ortogonali (paralleli) corrispondenti a queste rotazioni. Uno qualunque di questi sistemi sarà individuato (n. 1) da n funzioni H_i, che soddisfino alle (B), oppure da n funzioni W_i che soddisfino al sistema aggiunto (B^*). Ora diciamo che nel caso nostro: *Da un sistema noto* $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ *di soluzioni delle* (B^*) *si passa ad un sistema di soluzioni* $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ *del sistema aggiunto colle formole lineari*

$$H_i = c_i \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} W_\lambda . \tag{13}$$

Per dimostrarlo, si derivi questa rapporto ad u_k $(k \neq i)$, e ne verrà

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = c_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik} W_k) + \sum_{\lambda}^{(i)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{\lambda i} W_\lambda) ;$$

ed eseguendo le derivazioni, col porre mente alle (C) ed alle (B^*), si ottiene

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = c_i W_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_k}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + c_i \beta_{ik} \beta_{ki} W_i + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} \beta_{ki} W_\lambda +$$
$$+ W_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + c_k \beta_{ki} \frac{\partial W_k}{\partial u_k} + c_k W_k \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_\lambda - c_i}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} .$$

I tre termini contenenti W_k in fattore si elidono a causa della identità

$$c_i(c_\lambda - c_k) + c_\lambda(c_k - c_i) + c_k(c_i - c_\lambda) = 0 ,$$

e, raccogliendo i rimanenti, si può scrivere

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \left\{ c_k \frac{\partial W_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} W_\lambda \right\} ,$$

ossia precisamente

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k , \qquad \text{c. d. d.}$$

Le formole (13) dànno dunque trasformazioni *parallele* dei nostri sistemi tripli ortogonali, con sole quadrature (n. 1).

Se si applicano queste trasformazioni ai particolari sistemi (Σ) corrispondenti alla relazione (I), risulta, per le (II),

$$H_1 = H_2 = \cdots = H_n = 0 ,$$

e la trasformazione diventa illusoria, riducendosi il sistema trasformato ad un punto. Anche è da osservare che, se tutte le costanti c_i si aumentano di una medesima costante c (n. 6), i nuovi valori $\overline{H}_i$ delle H_i sono, per le (5),

$$\overline{H}_i = H_i + ch_i ,$$

cioè il sistema n^{plo} derivato è una combinazione lineare di quello corrispondente alle H_i e del primitivo dato dalle h_i.

In fine, per *l'inversione* di queste trasformazioni parallele basta osservare che, se si prendono $H_1, H_2, \ldots, H_n$ date da un qualunque sistema di soluzioni delle (B), le equazioni (B*) per le W_i, insieme colle (13), formano un sistema di equazioni ai differenziali totali completamente integrabile.

Meccanica celeste. — *Aggiunta alla Nota « Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili »*, del Socio PAOLO PIZZETTI [1].

Nella mia Nota, pubblicata con questo titolo nel 2° fascicolo del presente volume dei Rendiconti, il paragone da me fatto dell'orbita effettiva con una orbita kepleriana difetta di generalità pel fatto che io ho supposto che, in quella posizione particolare da me assunta come iniziale, la velocità relativa delle due masse sia ortogonale al raggio vettore, mentre, come è chiaro, si possono immaginare orbite spiraliformi, prive di afelii e di perielii. Di ciò mi fa giusta osservazione il chmo prof. Armellini in una sua gentile lettera.

Non è difficile conseguire la desiderata generalità modificando un poco il calcolo. Mi limito, per semplicità, al caso in cui risulti *ellittica* l'orbita kepleriana che serve di confronto (ossia quell'orbita kepleriana che corrisponde al valore iniziale M_0 della massa totale e ai valori iniziali del raggio vettore e del vettore velocità). È facile rifare il calcolo pei casi iperbolico e parabolico. Possiamo, nel caso in parola, determinare due quantità e_0 e γ tali che sia $0 < e_0 < 1$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, e che i valori iniziali di r e di $\frac{dr}{d\theta}$ (mantengo le notazioni della precedente Nota) soddisfacciano alle relazioni

$$\frac{1}{r_0} = \frac{fM_0}{c^2}(1 + e_0 \cos\gamma) \qquad \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_0 = \frac{fM_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}\gamma .$$

Si trova allora facilmente che le costanti A_0 e B_0 della mia formola (5) hanno i valori

$$A_0 = -\frac{fM_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}\gamma \qquad B_0 = \frac{fM_0}{c^2} e_0 \cos\gamma ,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1915.