ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

si ottengono, per il rapporto degli assi topici, dei valori la cui analogia con quelli del trinitrotoluolo α risulta senz'altro evidente:

P. sp. = 1.688 (Gossner)		$\chi = 8.5504$
P. mol = 213.054		$\psi = 4.5064$
V. = 126.22		$\omega = 3.2757$

Il grado di simmetria delle due sostanze è bensì diverso, ma non bisogna dimenticare che il trinitrotoluolo α è pseudorombico, con $\beta = 89\,{}^1/_2{}^\circ$; e quanto al trinitrobenzolo simmetrico, esso, secondo quanto riporta Groth (loc. cit.) dalle osservazioni dei suoi allievi, presenta per la distribuzione delle facce di bipiramide « *ein monoklines Ansehen* », che viene ad essere reso anche più manifesto « *durch zwillingsähnliche Parallelverwachsung nach* $\{100\}$ ». Nè io, per mio conto, potrei modificare una parola di tali conclusioni, dopo aver misurato alcuni perfettissimi cristalli di trinitrobenzolo 1.3.5; gli angoli tra i pinacoidi di questa sostanza sono infatti *rigorosamente* eguali a 90°, ma la distribuzione delle facce è spesso perfettamente monoclina.

Geometria. — *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*. Nota I di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO [1].

È noto, per un teorema classico di Poincaré, che, se una varietà algebrica contiene $\mu + 1$ ($\mu \geq 2$) integrali ellittici linearmente dipendenti, ne contiene senz'altro infiniti; ed è pur nota la dimostrazione geometrica estremamente elegante che di questo teorema ha dato il Severi, valendosi dell'osservazione che il sistema congiungente e il sistema intersezione di due sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una stessa varietà algebrica sono anch'essi regolari [2]. Anzi dalla dimostrazione del Severi risulta che, se quei $\mu + 1$ integrali ellittici sono a μ a μ indipendenti, l'infinità degli integrali ellittici, a cui essi dànno luogo — come dice il Severi — mediante operazioni interne di proiezione e sezione, è assimilabile a quella dei vertici di una *rete di Möbius* appartenente a un $S_{\mu-1}$.

Di qua non si è autorizzati a dedurre che se una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$ contiene $p + 1$ integrali ellittici, a p a p indipendenti, ad ogni suo integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1915.

(2) Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXII (1° sem. 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651].

vicini degli integrali ellittici (1), poichè la totalità degli integrali semplici di 1^a specie di una tale varietà è assimilabile a quella dei punti reali e complessi di un S_{p-1} (reale), mentre i vertici di una rete di Möbius appartenente a un S_{p-1}, presi insieme coi loro punti limiti, dànno una totalità assimilabile a quella dei punti reali di un S_{p-1} (reale).

Comunque sia di ciò, sorge la questione di decidere se esistano o no delle varietà algebriche su cui ad ogni integrale semplice di 1^a specie siano infinitamente vicini degli integrali ellittici.

La risposta affermativa a questa domanda, insieme con la caratterizzazione precisa delle varietà per cui si verifica il fatto considerato, è fornita agevolmente dal metodo geometrico a cui già abbiamo avuto occasione di far ricorso per lo studio degli integrali abeliani riducibili (2).

Ecco in breve i risultati a cui siamo pervenuti, insieme col richiamo delle nozioni e dei teoremi atti a chiarirne la portata.

Una varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$ ammette in generale una ed una sola relazione di Riemann (relativamente a un qualsiasi sistema primitivo di cicli lineari della sua riemanniana); ma può darsi che essa ne ammetta più di una, e allora ne ha infinite (3).

In ogni caso possiamo dire che V_p ha l'*indice di singolarità* k se fra le sue relazioni di Riemann ve ne sono $k+1$ indipendenti e non più, e dire che V_p è *non singolare* o k *volte singolare* secondo che si ha $k=0$ oppure $k>0$ (4).

Dato p, il numero k è assoggettato alla diseguaglianza

$$k \leq p^2 - 1 \text{ (5)}.$$

Allorchè V_p ammette una sola relazione di Riemann, ossia è non singolare, questa relazione è *principale* e di *caratteristica* $2p$ (6); d'altra parte la condizione necessaria e sufficiente perchè V_p contenga un sistema regolare di integrali semplici di 1^a specie riducibili è che fra le sue relazioni di Riemann ve ne sia qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$ (7); quindi:

Una varietà algebrica, contenente sistemi regolari di integrali semplici di 1^a specie riducibili, è necessariamente singolare.

(1) Vedi più innanzi (n. 2) per la definizione precisa di questa frase.

(2) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili.* Note I e II [Rendic. della R. Accademia dei Lincei, ser. 5^a, vol. XXIV (1^o sem. 1915), pp. 412-418 e pp. 645-654].

(3) Loc. cit. 3), Nota II, n. 8 e n. 10.

(4) Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), in corso di stampa] n. 57.

(5) Loc. cit. 5).

(6) Loc. cit. 3), Nota II, n. 10.

(7) Loc. cit. 3), Nota II, n. 19.

In base a questa osservazione, le varietà richieste son da cercare fra quelle singolari.

Ebbene noi dimostreremo che:

Le varietà algebriche di irregolarità superficiale $p > 1$, *su cui ad ogni integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente vicini degli integrali ellittici, sono tutte e solo quelle, effettivamente esistenti, per cui l'indice di singolarità è uguale a* $p^2 - 1$;

nel qual teorema è implicito il fatto che $p^2 - 1$ *è non solo un limite superiore, ma addirittura un massimo per* k.

Un altro teorema, a cui saremo condotti spontaneamente dalle considerazioni che seguono e che, sebbene non si riconnetta in modo stretto con lo scopo principale di questa Nota, non ci sembra privo di importanza, è il seguente:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$, *che sia almeno* $2p - 1$ *volte singolare, contiene infiniti sistemi regolari di integrali semplici di 1ª specie riducibili* [1].

1. Fissiamo sulla riemanniana della varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$ un sistema primitivo di $2p$ cicli lineari

$$l_1, l_2, \ldots, l_{2p},$$

e serviamocene (al modo che è indicato nei nn. 1 e 2 della nostra Nota I già citata) per rappresentare omograficamente gli integrali semplici di prima specie di V_p sui punti di un S_{p-1} imaginario, di specie p, di uno spazio reale Σ a $2p - 1$ dimensioni [2].

Diciamo τ quell'S_{p-1} e $\bar{\tau}$ lo spazio imaginario ad esso coniugato.

L'*imagine* e l'*imagine coniugata* di un sistema lineare ∞^{q-1} $(q < p)$ di integrali semplici di 1ª specie di V_p saranno, rispettivamente, l'S_{q-1} di τ, in cui quel sistema si riflette, e l'S_{q-1} di $\bar{\tau}$ ad esso coniugato: l'*asse* del sistema sarà poi lo spazio a $2q - 1$ dimensioni, *necessariamente reale*, che ne congiunge le imagini [3].

[1] Di qua facendo $p = 2$ si trae la nota proposizione che una superficie iperellittica (di rango 1) tre volte singolare ammette infiniti integrali ellittici. Del resto per $p = 2$ questo teorema è contenuto nel precedente ed è da esso precisato.

[2] Il modo a cui si allude nel testo e che giova tener presente consiste nel fissare in Σ un sistema di coordinate proiettive omogenee e nel far corrispondere ad ogni integrale semplice di 1ª specie di V_p (determinato a meno di una costante additiva e di una costante moltiplicativa) il punto di Σ che ha per coordinate i periodi dell'integrale ai cicli $l_1, l_2, \ldots, l_{2p}$.

[3] Loc. cit. [8], Nota I, n. 2 e n. 6. Cogliamo l'occasione per avvertire che nell'impaginazione di questa Nota è incorso un errore: le prime cinque righe della pag. 415 sono le ultime righe del n. 2, non del n. 1.

In particolare gli assi degli integrali semplici di 1ª specie di V_p saranno le rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$.

A questo proposito è utile tener presente che la condizione necessaria e sufficiente, perchè un sistema lineare ∞^{q-1} di integrali semplici di 1ª specie di V_p $(q < p)$ sia un sistema regolare di integrali riducibili, è che l'asse del sistema sia un S_{2q-1} razionale ([1]).

2. Siano adesso J un integrale semplice di 1ª specie di V_p, dotato al ciclo l_r del periodo Ξ_r $(r = 1, 2, \dots, 2p)$, e G un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V_p. Allora diremo che J è un *integrale limite di* G, oppure che *a* J *sono infinitamente vicini degli integrali di* G, oppure che J *è approssimabile mediante integrali di* G, se, in corrispondenza di ogni numero positivo (non nullo) ε, possono trovarsi infiniti integrali di G tali che, detto I uno qualunque di essi e detto ξ_r il periodo di I al ciclo l_r, si abbia

$$|\Xi_r - \xi_r| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \dots, 2p).$$

Se, in particolare, gli integrali di G sono tutti ellittici e J è un integrale limite di G, J sarà un integrale di V_p *approssimabile mediante integrali ellittici*, o un integrale di V_p a cui sono *infinitamente vicini degli integrali ellittici*.

Ciò posto, si ha subito che:

Se G *è un insieme di integrali semplici di 1ª specie di* V_p, *e* J *è un integrale limite di* G, *l'asse di* J *è retta limite per l'insieme di rette formato dagli assi degli integrali di* G.

E infatti diciamo Ξ_r e ξ_r, rispettivamente, i periodi al ciclo l_r $(r = 1, 2, \dots, 2p)$ dell'integrale J e di un integrale I di G; e poniamo

$$\Xi_r = H_r + iZ_r \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right),$$

e

$$\xi_r = \eta_r + i\zeta_r \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

con le H_r, Z_r, η e ζ_r reali.

L'asse di J è, per definizione, la retta congiungente il punto di Σ avente le coordinate

$$H_1 + iZ_1, H_2 + iZ_2, \dots, H_{2p} + iZ_{2p}$$

col punto avente le coordinate

$$H_1 - iZ_1, H_2 - iZ_2, \dots, H_{2p} - iZ_{2p}:$$

([1]) Loc. cit. [3]), Nota I, n. 5 e n. 6.

cioè la retta le cui coordinate sono date da

$$P_{r,s} = H_r Z_s - H_s Z_r \quad (r, s = 1, 2, \ldots, 2p \; ; \; r \neq s);$$

e allo stesso modo l'asse di I è la retta le cui coordinate sono date da

$$p_{r,s} = \eta_r \zeta_s - \eta_s \zeta_r \quad (r, s = 1, 2, \ldots, 2p \; ; \; r \neq s).$$

Ora, per l'ipotesi fatta su J, l'integrale I può scegliersi in infiniti modi distinti in G, di guisa che risulti

$$|\Xi_r - \xi_r| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p),$$

essendo ε un numero positivo assegnato ad arbitrio; ossia di guisa che risulti

$$|H_r - \eta_r| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |Z_r - \zeta_r| < \varepsilon \quad (r = 1, 2, \ldots, 2p):$$

dunque I può scegliersi in G in infiniti modi distinti, così che risulti

$$|P_{r,s} - p_{r,s}| < \varepsilon \quad (r, s = 1, 2, \ldots, 2p \; ; \; r \neq s):$$

cioè, come volevasi, l'asse di J è retta limite per l'insieme degli assi degli integrali di G.

Inversamente è chiaro che:

Se una retta reale è retta limite per l'insieme degli assi di un insieme G *di integrali semplici di 1ª specie di* V_p, *essa (è appoggiata a* τ *e* $\bar{\tau}$ *ed) è l'asse di un integrale limite di* G.

Basta osservare infatti, in primo luogo, che, essendo algebrica la varietà delle rette appoggiate a τ e $\bar{\tau}$, appartiene ad essa ogni retta reale che sia limite di rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$; e in secondo luogo che le coordinate del punto di intersezione dello spazio τ con una retta appoggiata ad esso si esprimono razionalmente per mezzo (delle coordinale di τ e) delle coordinate della retta.

Ricordando poi l'effetto di un cambiamento del sistema primitivo di cicli lineari sui periodi degli integrali semplici di V_p, si vede subito che la nozione di integrale limite di un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V_p è indipendente dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari $l_1, l_2, \ldots, l_{2p}$ sulla riemanniana di V_p.

3. I complessi lineari di Σ contenenti tutte le rette di τ e $\bar{\tau}$ costituiscono un sistema lineare Λ della dimensione $p^2 - 1$ [1].

Un complesso di Λ che sia singolare di specie (necessariamente pari) $2q$ $(q = 1, 2, \ldots, p - 1)$ ha per asse un S_{2q-1} appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo

[1] Per questa affermazione, e per altre che seguono nel presente numero, giova tener presente la Memoria citata nella nota [5].

spazî a $q-1$ dimensioni; viceversa, un tale S_{2q-1} è spazio singolare per un sistema lineare di $\infty^{(p-q)^2-1}$ complessi di $\mathit{\Lambda}$.

Adesso consideriamo la totalità (lineare) dei complessi lineari di Σ, che ha la dimensione $p(2p-1)-1$, e riferiamola omograficamente alla totalità dei punti di uno spazio lineare S della stessa dimensione, fissando in S un sistema di coordinate proiettive omogenee e facendo corrispondere al complesso lineare di Σ, avente per equazione

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} a_{r,s}\, x_r\, y_s = 0 \qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0),$$

il punto di S che ha per coordinate i coefficienti $a_{r,s}$ di questa equazione per cui $r < s$.

Entro S si avranno:

a) un' ipersuperficie F dell' ordine p rispondente alla totalità dei complessi lineari singolari di Σ, e

b) uno spazio lineare Σ' della dimensione p^2-1 rispondente all' insieme dei complessi di $\mathit{\Lambda}$;

poi entro Σ' si avrà:

a') un' ipersuperficie $F^{(1)}$ d'ordine p intersezione di F con Σ', rappresentante la totalità dei complessi lineari singolari di $\mathit{\Lambda}$ (di specie ≥ 2); e

b') una serie di varietà $F^{(2)}, F^{(3)}, \ldots, F^{(p-1)}$ rappresentanti gli insiemi dei complessi singolari di $\mathit{\Lambda}$ di specie $\geq 4, \geq 6, \ldots, \geq 2p-2$.

Le $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(p-1)}$ sono, successivamente, le varietà dei punti doppî, tripli, ... $(p-1)$-pli di $F^{(1)}$; $F^{(p-1)}$ è una varietà di Segre di 2ª specie con gli indici eguali entrambi a $p-1$; ed $F^{(p-2)}, F^{(p-3)}, \ldots, F^{(1)}$ sono, ordinatamente, le varietà delle corde, dei piani trisecanti, ..., degli S_{p-2} $(p-1)$-secanti di $F^{(p-1)}$.

Lo spazio Σ' e le varietà $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(p-1)}$ sono reali; e i punti reali di $F^{(1)}$ si distribuiscono in due falde, delle quali una, quella che chiamiamo la *prima falda*, è atta a dividere la totalità dei punti reali di Σ' in una regione di punti interni e in una regione di punti esterni.