

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

chiusura in parti che nello sviluppo normale si comporterebbe in modo molto differente.

In tutti i reperti che possono essere compresi tra quelli rappresentati dalla fig. 1 alla fig. 6 e in cui si riscontrano evidenti modificazioni spaziali, le formazioni boccali non possono essere adatte alla funzione nutritiva.

*Meccanica. — Sulla forma della traiettoria nel problema dei due corpi di masse crescenti, e sulle sue applicazioni per una possibile spiegazione della grande eccentricità di Marte.*  
Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA<sup>(1)</sup>.

1. — In una mia Memoria<sup>(2)</sup>, apparsa da poco tempo, ho studiato il problema dei due corpi di masse variabili. Nel caso speciale, però, in cui le masse siano crescenti, è possibile di esaminare più da vicino le particolarità del moto e formarsi anche un'idea sulla forma della traiettoria. Siccome questo caso ha grande importanza per il sistema planetario, dedico ad esso la presente Nota, che potrà servire come appendice alla Memoria citata.

Poichè come è evidente, il movimento ha luogo in un piano, sceglieremo, al solito, uno dei corpi O come origine e determineremo la posizione dell'altro A, per mezzo delle sue coordinate polari  $r, \vartheta$ . Chiamando con  $M(t)$  la somma delle masse di A ed O, e prendendo le unità di misura in modo che tanto il coefficiente attrattivo  $f$  quanto la costante delle aree  $c$  ( $c \neq 0$ ) si riducano uguali ad 1, partiamo dall'equazione (53) della mia Memoria:

$$(1) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \vartheta + \left( \frac{d \frac{1}{r}}{d \vartheta} \right)_0 \sin \vartheta + \sin \vartheta \int_0^\infty M(t) \cos \vartheta d \vartheta - \\ - \cos \vartheta \int_0^\infty M(t) \sin \vartheta d \vartheta,$$

dove  $\frac{1}{r_0}$  e  $\left( \frac{d \frac{1}{r}}{d \vartheta} \right)_0$  sono i valori di  $\frac{1}{r}$  e della sua derivata per  $\vartheta = 0$ .

La (1) diviene, come è chiaro, approssimata, se al posto di  $M(t)$  si sostituisce la sua espressione approssimata in  $\vartheta$ , ciò che è stato fatto nella Memoria; mentre è matematicamente rigorosa, posta sotto la forma qui scritta.

Le quadrature, è vero, non sono più eseguibili; ma, per le ipotesi fatte su  $M(t)$ , il primo membro  $\frac{1}{r}$  risulterà certamente finito per ogni valore

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1915.

(2) *Il problema dei due corpi di masse variabili*, Memoria di G. Armellini (in Mem. Società italiana delle Scienze detta dei XL, ser. 3<sup>a</sup>, tomo XIX).

finito di  $\vartheta$ . Ne risulta, come prima conseguenza, che *il corpo A non può urtare l'altro corpo O, se non dopo aver compiuto, intorno ad esso, un numero infinito di rivoluzioni* <sup>(1)</sup>. Ciò che del resto poteva anche dedursi dal teorema II della mia Memoria e dall'integrale delle aree

$$(2) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1.$$

La (2) anzi ci mostra che  $\vartheta$  è funzione crescente di  $t$ ; e poichè, per ipotesi,  $M(t)$  è funzione crescente di  $t$ , ne deduciamo che essa è anche funzione crescente di  $\vartheta$ . Ne segue che, essendo  $K$  un intero positivo qualsiasi, avremo

$$(3) \quad \int_0^{2K\pi} M(t) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta < 0.$$

2. Teorema I. — *La traiettoria non può mai passare due volte per uno stesso punto del suo piano* <sup>(2)</sup>. Infatti, se, per  $\vartheta = \vartheta_1$ , si ha  $r = r_1$ , e se, dopo un certo tempo,  $\vartheta$  assume il valore  $\vartheta_1 + 2K\pi$ ,  $r$  avrà in quell'istante un valore minore di  $r_1$  <sup>(3)</sup>.

Dimostraz. — Senza togliere nulla alla generalità della questione, possiamo assumere l'asse polare in modo che sia  $\vartheta_1 = 0$ . Indicando allora con  $r_2$  il valore di  $r$  per  $\vartheta = \vartheta_1 + 2K\pi = 2K\pi$ , dalla (1) e dalla (3) avremo

$$(4) \quad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = - \int_0^{2K\pi} M(t) \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta > 0,$$

da cui

$$(5) \quad r_2 < r_1. \quad \text{C. d. d.}$$

<sup>(1)</sup> Supponiamo naturalmente che la costante delle aree sia diversa da zero.

<sup>(2)</sup> Nel caso generale in cui  $M(t)$  non è crescente, il teorema non sussiste più. Si dimostra allora, però, che, se  $M(t_1) \geq M(t_2)$  e se negli istanti  $t_1$  e  $t_2$ ,  $A$  passa per uno stesso punto  $P$  del piano, i due rami della traiettoria non possono avere in  $P$  un contatto superiore al 1° ordine (teorema III della mia Memoria).

<sup>(3)</sup> La presente dimostrazione prescinde da ogni ipotesi sulla forma della traiettoria, ed è quindi valida in ogni caso.

Supponiamo però di sapere *a priori* che in un caso particolare l'orbita ammetta un perielio od afelio; vale allora un teorema recentemente dato dal prof. Pizzetti (*Sul problema dei due corpi di masse variabili*, Nota del Socio P. Pizzetti, questi Rendiconti, luglio 1915) il quale dimostra che, per uno stesso valore positivo di  $\vartheta$ , il raggio vettore è più piccolo del valore che esso avrebbe nel moto kepleriano. Potevamo, anzi, considerare il teorema I come caso particolare del bel teorema del Pizzetti; ma abbiamo dato una nuova dimostrazione, giacchè altrimenti sarebbero sfuggite, alle nostre considerazioni, alcune orbite a forma di spirale per cui il  $\frac{dr}{d\vartheta}$  può essere, p. es., sempre negativo. Colgo l'occasione per ringraziare caldamente il chmo prof. Pizzetti delle lusinghiere parole che egli ha avuto nella sua importante Nota per i miei lavori.

Osservaz. I. — Da questo teorema non si potrebbe dedurre, che l'orbita di A sia una spirale avvolta intorno all'origine O, giacchè noi non sappiamo se il corpo A compie, *effettivamente*, delle rivoluzioni *complete* intorno ad O.

Supponiamo, però, che in un caso particolare si sia giunti a dimostrare che, da un certo istante in poi,  $r$  resta sempre minore di una quantità  $L$  finita e ben determinata, benchè incognita. Dall'integrale delle aree (2) potremo concludere che A compie un'infinità di rivoluzioni intorno ad O. *La sua traiettoria avrà allora, per il teorema I, la forma di una spirale, di cui ogni spira è interna alla spira precedente.* Un caso importantissimo, in cui ha luogo questo fatto, si ha quando la differenza iniziale tra la forza viva e la funzione delle forze è nulla o negativa (teorema IX della mia Memoria), cioè nel *caso nei pianeti e delle comete paraboliche.*

Osservaz. II. — Supponiamo di essere riusciti a dimostrare che  $r$  tende all'infinito insieme con  $t$ . Se ne dedurrà che A *non può compiere alcuna rivoluzione completa intorno ad O.*

Teorema II. — *L'angolo compreso tra un perielio e l'afelio successivo (supposto che esistano) è sempre minore di due retti.*

Dimostraz. — Cominciamo ad osservare che, avendo supposto l'esistenza di un afelio,  $r$  ammetterà, per tutti i tempi successivi, un limite superiore finito  $L$  (teorema V della Memoria). Il corpo A compirà dunque *infinite rivoluzioni* intorno ad O. Ciò posto, dalla (2) abbiamo:

$$(6) \quad \frac{d \frac{1}{r}}{d\vartheta} = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = - \frac{dr}{dt} \frac{1}{r^2} \frac{dt}{d\vartheta} = - \frac{dr}{dt}.$$

Immaginiamo (ciò che non toglie nulla alla generalità della questione) che A passi al perielio per  $\vartheta = 0$ . L'equazione (1) ci dà allora, tenendo presente la (6),

$$(7) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\text{sen } \vartheta}{r_0} - \cos \vartheta \int_0^{\infty} M(t) \cos \vartheta d\vartheta - \text{sen } \vartheta \int_0^{\infty} M(t) \text{sen } \vartheta d\vartheta,$$

da cui risulta che il  $\frac{dr}{dt}$  è *negativo* per  $\vartheta = \pi$ . D'altra parte la derivata  $\frac{dr}{dt}$  è funzione *continua* di  $\vartheta$ , ed è positiva per  $\vartheta$  positivo e sufficientemente piccolo, avendosi un perielio per  $\vartheta = 0$ . Se ne conclude che, nell'intervallo  $0 < \vartheta < \pi$ , il  $\frac{dr}{dt}$  ammette un numero *dispari* di radici reali. Dunque l'afelio avrà luogo per  $\vartheta < \pi$ . C. d. d.

Teorema III. — *L'angolo compreso tra un afelio e il perielio successivo (supposto che esistano) è maggiore di due retti.*

Dimostraz. — Si potrebbe imitare il procedimento precedente, osservando che, essendo ora  $\frac{dr}{dt}$  negativa per valori sufficientemente piccoli e positivi di  $\mathcal{J}$ , nell'intervallo  $0 < \mathcal{J} < \pi$  essa deve ammettere un numero pari di radici reali. Si dimostrerebbe, poi, che questo numero è uguale allo zero. Ma è forse più breve di ragionare nel modo seguente:

In un dato istante  $t$ , posteriore al passaggio all'afelio, sia

$$(8) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\mathcal{J} - \omega)$$

l'equazione della conica osculatrice, certamente *ellittica* essendosi ammessa l'esistenza di un afelio anteriormente a  $t$  (ved. teorema IX della Memoria). Indichiamo con  $e, p, \omega$ , rispettivamente, l'eccentricità, il parametro, la longitudine del perielio. Con le nostre unità avremo, per formole notissime (1),

$$(9) \quad e = p \sqrt{\{M(t)\}^2 + 2h} \quad , \quad p = \frac{1}{M(t)}$$

dove il radicale va preso col segno positivo. Supponiamo che in quell'istante la massa del sistema aumenti bruscamente di  $dM$ : avremo, facendo variare  $p, e, \omega, h$ , e mantenendo costanti  $r$  e  $\mathcal{J}$ ,

$$(10) \quad 0 = dM + \frac{M dM + dh}{\sqrt{M^2 + 2h}} \cos(\mathcal{J} - \omega) + \sqrt{M^2 + 2h} \sin(\mathcal{J} - \omega) \cdot d\omega ;$$

ed essendo, per la formola (14) della Memoria,

$$(11) \quad dh = - \frac{dM}{r} ,$$

otterremo, dopo eseguite le riduzioni necessarie,

$$(12) \quad \frac{d\omega}{dM} = \frac{\cos^2(\mathcal{J} - \omega) - 1}{\sin(\mathcal{J} - \omega) \sqrt{M^2 + 2h}} .$$

Siccome il radicale va preso col segno positivo, la derivata  $\frac{d\omega}{dM}$  avrà segno contrario al termine  $\sin(\mathcal{J} - \omega)$ , cioè al *seno dell'anomalia vera*. Ora, in tutto l'intervallo di tempo, compreso tra un passaggio all'afelio e il successivo appulso al perielio, questo seno è certamente negativo. Dunque in tutto questo tempo l'aumento di massa del sistema, avrà per effetto di far

(1) Ved. Appell, *Traité de mec. rat.*, tom. I<sup>er</sup>, pag. 392 (troisième édition). Sarà inutile di ricordare al lettore che noi scriviamo  $2h$ , là dove l'Appell scrive semplicemente  $h$ ; infatti l'Appell pone  $v^2 = \frac{2M}{r} + h$ .

augmentare la longitudine del perielio. La distanza angolare tra un afelio e il successivo perielio sarà perciò maggiore di  $\pi$ .

**Teorema IV.** — *Supponiamo che si abbia  $\lim_{t=\infty} r = \infty$ . Io dico che si avrà anche  $\lim_{t=-\infty} r = \infty$ ; e che, da  $t = -\infty$  a  $t = \infty$ ,  $r$  ammetterà certamente e solamente un minimo (perielio).*

**Dimostraz.** — Intanto è chiaro, per l'osservazione II, che A non potrà compiere alcuna rivoluzione intorno ad O. Variando quindi  $t$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , l'anomalia  $\vartheta$  varierà da  $\alpha$  a  $\beta$ , essendo  $\beta - \alpha < 2\pi$ .

Ne segue che la derivata  $\frac{d\vartheta}{dt}$  tenderà a zero quando  $t$  tende a  $-\infty$ ; e quindi, per la (2),  $r$  tenderà a  $\infty$ .

Ciò posto, essendo  $r$  funzione continua di  $t$ , e divenendo  $\infty$  per  $t = \pm\infty$ , essa ammetterà certamente un minimo. Che non possa ammetterne più di uno, è poi stato dimostrato nel teorema VI della mia Memoria.

**Osservaz.** — Questo teorema ci mostra che, anche nel caso di masse crescenti [ed anche se  $\lim_{t=\infty} M(t) = \infty$ , purchè  $M(t)$  divenga  $\infty$  di ordine inferiore al primo (teorema I della mia Memoria)] si possono avere orbite somiglianti ad iperbole, senza però alcun asse di simmetria per l'origine (pag. 11 della mia Memoria).

Sarà inutile osservare che il teorema contrario non sussiste: può aversi infatti  $\lim_{t=-\infty} r = \infty$ , senza che ne discenda  $\lim_{t=\infty} r = \infty$ .

**Teorema V.** — *Se la conica osculatrice è un'iperbole (o parabola), l'eccentricità è funzione decrescente del tempo.*

**Dimostraz.** — Ponendo, al solito,  $c = f = 1$ , si ha la formola

$$(13) \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h}{[M(t)]^2}};$$

da cui, differenziando, e ricordando la (11),

$$(14) \quad e \frac{de}{dM} = - \frac{1}{[M(t)]^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{2h}{M(t)} \right\}.$$

Siccome, per ipotesi,  $h$  è positivo o nullo, la derivata  $\frac{de}{dM}$  sarà negativa.

**Teorema VI.** — *Se in un dato istante  $t$  la conica osculatrice è un'ellisse, l'eccentricità sarà funzione crescente o decrescente del tempo, secondo che, in quell'istante, il coseno dell'anomalia eccentrica  $u$  è negativo o positivo.*

Dimostraz. — Supposto che all'istante  $t$  la conica osculatrice sia ellittica, avremo, chiamando con  $u$  ed  $a$ , rispettivamente, l'anomalia eccentrica e il semiasse maggiore:

$$(15) \quad h = -\frac{M(t)}{2a} \quad ; \quad r = a(1 - e \cos u),$$

da cui, sostituendo nella (14), otterremo, con alcune riduzioni,

$$(16) \quad \frac{de}{dM} = \frac{\cos u}{M^2 a (e \cos u - 1)}.$$

Siccome, per ipotesi, si ha  $e < 1$ , il segno della derivata  $\frac{de}{dM}$  sarà contrario al segno del  $\cos u$ (<sup>1</sup>).

3. — Cominciamo dal caso in cui  $M(t)$  per  $t = \infty$  diviene  $\infty$  d'ordine eguale o superiore al primo. Per l'osservazione I, e per il teorema VIII della mia Memoria, la traiettoria presenta allora, *necessariamente*, la forma di una spirale, di cui ogni spira è contenuta nella precedente. L'urto ha luogo per  $t = \infty$  (fig. 1).

Supponiamo, al contrario, che  $M(t)$  divenga  $\infty$  per  $t = \infty$ , ma d'ordine inferiore al primo. La traiettoria presenta allora due forme differenti: o quella ora studiata, oppure una forma somigliante ad un'iperbole. Il corpo A parte dall'infinito per  $t = -\infty$ ;  $r$  decresce fino ad un certo minimo  $\varrho$ , poi torna a crescere tendendo all'infinito insieme con  $t$ . Come si è detto, non vi è alcun asse di simmetria (fig. 2).

Esaminiamo ora il caso in cui si abbia  $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = B$ ; essendo B una quantità finita e positiva. È allora chiaro che, tendendo  $t$  all'infinito, l'orbita tende a cangiarsi in una conica. D'altra parte, essendo  $M(t)$  funzione crescente, e sempre positiva per valori reali dell'argomento, si ha necessariamente  $\lim_{t \rightarrow -\infty} M(t) = b$ . Possiamo dunque dire che la traiettoria è in questo caso *doppiamente assintotica*, tendendo a cangiarsi in una conica per  $t = \pm \infty$ . Siccome  $h$  è funzione decrescente di  $t$ , i casi possibili sono cinque, secondo che le traiettorie limiti per  $t = -\infty$  e per  $t = \infty$  sono:

$\alpha$ ) due ellissi (fig. 3);

$\beta$ ) una parabola (per  $t = -\infty$ ) ed una ellisse (per  $t = \infty$ ) (fig. 4);

$\gamma$ ) un'iperbole (per  $t = -\infty$ ) ed una ellisse (per  $t = \infty$ ) (fig. 5).

In questi tre casi A compie infinite rivoluzioni intorno ad O;

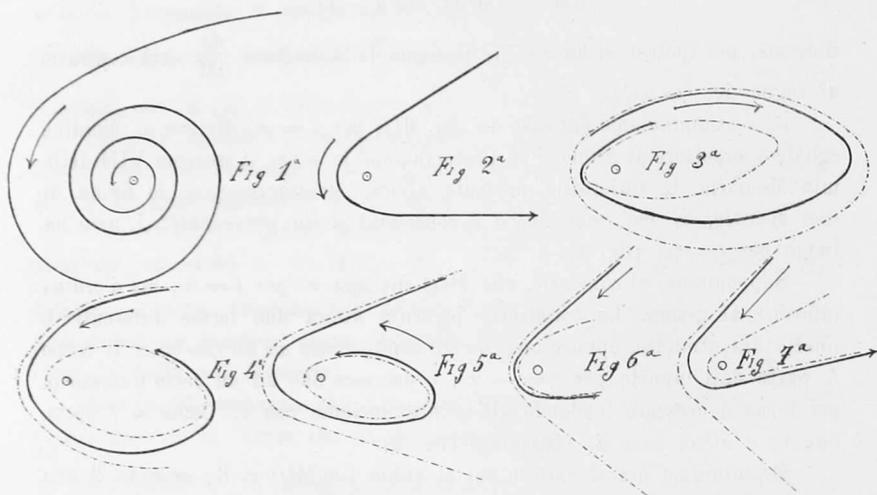
$\delta$ ) un'iperbole ed una parabola (fig. 6).

(<sup>1</sup>) Supponiamo che l'orbita di un pianeta sia esattamente circolare e che sul Sole cada un aereolite all'istante  $t$ . Essa si cangerà in un'ellisse avente l'afelio nella posizione occupata dal pianeta in questo istante. Occorre quindi porre nelle (16)  $e = 0$ ,  $\cos u = -1$ , da cui  $\frac{de}{dM} = \frac{1}{M^2 a}$ . Invece l'effetto globale di una leggiera pioggia d'aereoliti uniformemente diffusa su tutta l'orbita è di far restare l'orbita simile a se stessa.

$\epsilon$ ) due iperbole, di cui la seconda (per  $t = \infty$ ) ha eccentricità minore della prima (per  $t = -\infty$ ) (fig. 7).

In questi due casi *A non compie alcuna rivoluzione completa* intorno ad *O*. Nel caso di  $b = 0$ , la conica limite per  $t = -\infty$  è una retta.

4. — Studiamo il movimento del pianeta Marte, la cui orbita è tutta interna, ma vicina alla zona degli asteroidi. È assai probabile che in questa zona vi fosse una grande quantità di materia diffusa, almeno in epoche remotissime. Ne segue che in tempi antichissimi sono cadute sul pianeta



grandi piogge meteoriche, la cui intensità, naturalmente, era maggiore in quella metà dell'orbita per cui  $r > a$ , giacchè allora Marte era più vicino alla zona degli asteroidi. Ma allora il coseno dell'anomalia eccentrica è negativo: queste piogge, quindi, hanno *aumentato* l'eccentricità di Marte.

Osserviamo ancora che la materia che andava cadendo su Marte apparteneva, in ogni istante, a quella parte dell'anello più vicino al pianeta, cioè a quella parte la cui attrazione si opponeva in ogni istante all'attrazione solare. L'effetto sarà quindi maggiore: precisamente come se queste piogge fossero state molto più forti. Tutto ciò spiega forse in modo assai semplice la grande eccentricità di Marte. Si può supporre che, allo stato iniziale, esso avesse presso a poco la stessa eccentricità degli altri pianeti; in seguito, per le ragioni ora dette, questa aumentò notevolmente (<sup>1</sup>).

(<sup>1</sup>) Analogamente si potrebbe spiegare la grande eccentricità di Mercurio ammettendo l'esistenza di un anello di materia cosmica (ora scomparso) tra Mercurio e Venere. Ma per Mercurio data la sua vicinanza al Sole, si può anche ricorrere all'ipotesi delle *maree*, le quali secondo il Darwin possono aumentare l'eccentricità di un'orbita.