ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulle superficie algebriche contenenti infinite coniche*. Nota I di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

Tra le superficie algebriche contenenti sistemi infiniti di curve algebriche di tipo particolare, le più interessanti, dopo le rigate, sono certo quelle che posseggono infinite coniche.

Si sa che le superficie di 4° ordine luoghi di coniche furono determinate da Kummer [2]. Quelle di 5° ordine sono pure conosciute (almeno nei tipi principali): le razionali già da tempo [3]; le irrazionali per due lavori recenti del De-Franchis ed uno mio [4].

Nelle Note presenti espongo i risultati a cui sono pervenuto cercando i tipi proiettivamente distinti di superficie di 6° ordine luoghi di coniche (gli sviluppi relativi si troveranno in un'apposita Memoria). Per raggiungere questo scopo riconobbi conveniente prescindere anzitutto dal valore particolare dell'ordine della superficie, per stabilire alcune proprietà comuni a tutte le superficie algebriche luoghi di coniche. I teoremi così ottenuti, mentre permettono di ritrovare assai facilmente i risultati relativi ai valori 4 e 5 dell'ordine della superficie, si applicano bene a superficie di 6° ordine, e si potrebbero anche applicare a superficie di ordine > 6: le trattazioni a cui si arriva sono sempre uniformi, per quanto le difficoltà pratiche vadano allora notevolmente crescendo.

1. Escluse le rigate e la superficie romana di Steiner [5], se una superficie algebrica irriducibile d'ordine m, che indicheremo brevemente con F^m,

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1915.

(2) Kummer, *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen*, Crelle, 64 (1865), pp. 66-76.

(3) Oltre le F^5 con retta tripla, si hanno infatti la F^5 con C^4 doppia di 1ª specie [Clebsch, *Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen 5. Ordnung*, Abhandl. Gesell. Göttingen, 15 (1870), pp. 2-64], e la F^5 con C^5 doppia e punto triplo su questa [Caporali, *Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine*, Ann. di matem., (2) 7 (1875), pp. 149-188].

(4) De Franchis, *Le superficie. più volte irregolari, di 5° ordine con punti tripli*, questi Rendiconti, (5) 15_2 (1906), pp. 217-222; id., *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche*, id., pp. 284-286; Togliatti, *Sulle superficie algebriche, del 5° ordine, irriducibili, con un fascio ellittico di coniche*, questi Rendiconti, (5) 21_2 (1912), pp. 35-37. Pure alle F^5 luoghi di coniche è dedicato (in parte) un lavoro recente del Marletta, *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5*, Atti Accad. Gioenia, (5) 8 (1915), Mem. XIV.

(5) Questa restrizione è essenziale per il sèguito.

contiene infinite coniche, queste si distribuiscono in uno o più fasci. Se la F^m contiene più fasci di coniche (almeno due), questi sono tutti razionali, ed anche la superficie è razionale; se la F^m contiene un sol fascio di coniche, il cui genere indicheremo con p, essa si può riferire birazionalmente ad un cono di genere p.

Oltre al genere p di un fascio di coniche, T, giacente su una F^m, vi sono da considerare altri caratteri, e cioè: la classe α della sviluppabile formata dai piani delle coniche (la F^m si suppone ora immersa in uno spazio S_3); il numero s delle coniche di T giacenti in ciascun piano della sviluppabile; il genere π delle sezioni piane generiche della F^m. Tra i caratteri m, p, α, s, π intercedono delle relazioni.

Anzitutto, considerando l'involuzione I di 2° grado e genere p che le coniche di T segano sulla sezione piana generica C di F^m, e cercando le coppie di I che stanno su rette uscenti da un punto generico del piano di C ([1]), si trova che

$$\pi = m + 2p - \alpha s - k - 1\,, \tag{1}$$

dove k è il numero delle coniche di T ridotte ad una retta da contar due volte e che, per di più, sia doppia (almeno) per la F^m.

Esaminando poi il gruppo dei punti doppî della I (il cui numero è dato dalla formola di Zeuthen), si trova che esso si compone sempre almeno di 4 punti, onde

$$\pi \geq 2p + 1\,. \tag{2}$$

Essendo $\pi \leq \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, di qui risulta

$$p \leq \mathrm{E}\left[\frac{1}{4}m(m-3)\right], \tag{3}$$

dove il simbolo E indica « parte intera ».

Infine, dal confronto delle (1), (2), si ricava per il numero, αs, delle coniche del fascio il cui piano passa per un punto generico dello spazio la limitazione

$$\alpha s \leq m - 2\,. \tag{4}$$

2. I teoremi precedenti bastano già per compiere, una volta fissato il valore di m, uno schema dei tipi possibili di F^m luoghi di coniche.

[1] Castelnuovo, *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, questi Rendiconti, (4) 7, (1891), pp. 294-299, § 1; Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Ann. di matem., (2) 22 (1894), pp. 41-142, n. 53.

Si osservi perciò che il piano della conica generica del fascio T sega ancora F^m in una linea γ d'ordine $m-2$, irriducibile o spezzata, ma che non può contenere alcuna componente rettilinea variabile col piano della conica considerata. Ad es., per $m=4$ quella linea può essere una conica irriducibile (dello stesso fascio di quella di prima, oppur no), oppure una retta fissa da contar due volte, che sarà doppia per la F^4; per $m=5$ la linea γ può essere una C^3 irriducibile, oppure si può comporre di una conica (del fascio T) e di una retta fissa, oppure di una retta fissa da contar tre volte che sarà tripla per la F^5. Infine, per $m=6$ la linea γ può essere una C^4 irriducibile, oppure può comporsi d'una conica di T e di una retta doppia della F^6, o di una retta quadrupla della F^6, o di due coniche. E così via, per valori di $m>6$.

Quando la linea γ ha una componente irriducibile di ordine >2 (od anche di 2° ordine, purchè si tratti allora di una conica non appartenente al fascio T), questa è incontrata da ogni conica di T in un punto variabile od in due; nel secondo caso si ha da considerare su di essa un'involuzione di coppie di punti che si può facilmente studiare. È quindi chiaro che si possono sempre trovare, per ogni forma della curva γ, i valori possibili di α e di s: bisognerà perciò valersi anche della (4). Dando poi al genere p di T i valori che può assumere, in base alla (3), la (1) permette di calcolare π in funzione di k.

La via qui sommariamente indicata conduce a riconoscere possibili varî tipi di superficie, per ciascuno dei quali si avranno i valori di p, π, α, s, k.

3. Rimane da discutere l'esistenza effettiva di tutte queste superficie. Per ciò torna comodo ricorrere al sistema lineare aggiunto a quello delle sezioni piane di F^m. Se $\pi>1$, un tal sistema, che è segato su F^m (fuori delle linee multiple) dalle superficie aggiunte d'ordine $m-3$, esiste, ed è composto col fascio T di coniche [1]: le sue curve coincidono cioè coi gruppi di una serie lineare $g^{\pi-p-1}_{\pi-1}$ sopra T.

Ciò permette di costruire la F^m con un riferimento algebrico tra i piani d'una sviluppabile di classe α, e di tipo noto, e le F^{m-3} aggiunte di un fascio. Nel maggior numero dei casi si può scegliere questo fascio in guisa che i suoi elementi contengano tutti una componente fissa, il che semplifica la costruzione; ad es., per $m=6$, se le coniche di T stanno a coppie nei piani di un fascio, le F^3 aggiunte costrette a contenere due coniche complanari di T hanno tutte come parte il piano delle due coniche, e perciò (in generale) consentono di sostituire, nella costruzione della F^6, un fascio di quadriche al fascio di F^3, ecc. E sarà pure facile scrivere l'equazione della superficie costruita; dopo di che il suo studio ulteriore non presenta più difficoltà essenziali.

[1] Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Mem. Soc. it. delle Sc. (dei XL), (3) 10 (1896), pp. 1-81, n. 30.

4. Il procedimento ora esposto cade in difetto quando $\pi = 1$, mancando allora il sistema aggiunto a quello delle sezioni piane. Si osservi però che le superficie con sezioni piane di genere 1 sono note, e sono razionali o rigate; escludendo le rigate ellittiche, una F^m con sezioni piane di genere 1 è proiezione d'una F^m di S_m ($m \leq 9$), razionale, di cui è nota la rappresentazione sul piano, e che (per $m \leq 8$) contiene sempre uno o più fasci di coniche; anzi, in questo gruppo rientrano tutte le F^m con più fasci di coniche, come ora diremo brevemente.

Quando per ogni punto d'una superficie passano due o più coniche giacenti su di essa, la superficie contiene due o più fasci di coniche, oppure un sistema ∞^1 di coniche di indice > 1. È noto che tali superficie erano già state determinate dal Koenigs [1], con procedimenti che si possono però notevolmente semplificare. Infatti la sezione piana generica d'una superficie con più fasci di coniche (necessariamente tutti razionali) contiene più serie lineari g_2^1, e quindi è di genere 0 od 1; mentre una superficie con un sistema ∞^1 di coniche di indice > 1 possiede sempre un sistema lineare di coniche (almeno ∞^2) che contiene il precedente [2], che ha lo stesso suo grado d, e quindi la dimensione $d + 1$ [3]. Perciò la superficie contiene sempre una rete omaloidica di coniche, che permette di rappresentarla sul piano con un sistema lineare di coniche, per modo che le sezioni piane risultano ancora razionali. Ricorrendo allora ai noti teoremi sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane di genere 0 od 1 [4], si trova che le sole superficie normali per ogni punto delle quali passino due o più coniche sono le quadriche, la rigata cubica di S_4, la superficie del Veronese, la F^8 di S_8 rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le C^4 con due punti base doppî distinti e le F^n di S_n sue proiezioni.

Escludendo dunque le rigate e la superficie di Steiner, le F^m con più fasci di coniche (o, più generalmente, le F^m luoghi di coniche con sezioni piane di genere 1) sono determinabili come proiezioni di una F^m di S_m, con $m \leq 8$.

5. La dimensione dello spazio normale per una F^m luogo di coniche è facilmente determinabile nel caso di superficie razionali e vale $m - \pi + 1$; per superficie irrazionali poco si può dire, in generale, oltre ciò che è dato

[1] Koenigs, *Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques*, Ann. éc. norm., (3) 5 (1888), pp. 177-192.

[2] Castelnuovo ed Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Ann. di matem., (3) 6 (1901), pp. 165-225, n. 17.

[3] Segre, *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p*, Rendiconti Palermo, 1 (1887), pp. 217-221.

[4] Per questi teoremi si veda ad es. Ferretti, *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere*, Rend. Palermo, 16 (1902), pp. 236-279, teoremi VII e X.

dal teorema Riemann-Roch per superficie qualsiasi (¹). E cioè quella dimensione risulta $\geq m - \pi - p + 1$; come caso speciale, la F^m è normale in S_3 se le aggiunte d'ordine $m - 4$ della sezione piana generica formano un sistema lineare regolare. Così una F^5 irrazionale, luogo di coniche, è sempre normale in S_3; e lo stesso accade per una F^6 irrazionale luogo di coniche, finchè il genere della sua sezione piana generica è ≥ 5.

(¹) Severi. *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti Accad. Torino, 40 (1904-1905), pp. 766-776.

E. M.