ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

D'altra parte l'errore probabile corrispondente all'unità di peso è rappresentato da:

$$\sigma = {}^2/_3 \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n-1}}$$

che nel nostro caso, essendo p sempre uguale a dieci, diventa

$$\sigma = {}^2/_3 \sqrt{\frac{10\,[\Delta\Delta]}{28}}$$

e fatto il calcolo coi due valori di $[\Delta\Delta]$ troviamo

$$\sigma_\alpha = \pm\, 0^s.027 = \pm\, 0''.41 \qquad \sigma_\delta = \pm\, 0''.44\,.$$

Complessivamente abbiamo dunque per tutte due le coordinate $\pm\, 0''.4$.

Come si vede questa è una buona conseguenza riportandola tutta allo strumento adoperato, tanto più buona dal mio punto di vista se si pensa che da esso io non pretendeva [1] maggior precisione di 2″ per una singola osservazione, ovvero sia 1″ su quattro. Questo dato bastò per iniziare con un mezzo così modesto un lavoro sistematico corrente di catalogo stellare, ed il Viaro con buone virtù lo portò a compimento con un successo maggiore dell'aspettazione. Di fronte a questo risultato, io, ripeto qui in fine quanto ho detto dapprincipio: che nel campo dell'astronomia di posizione converrà all'Osservatorio di Arcetri restar attivo con un cerchio meridiano maggiore di quello che ora possiede; ma, ciocchè è più, dello stesso identico tipo.

Matematica. — *Sulle soluzioni periodiche nel Calcolo delle Variazioni*. Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle [2].

L. Lichtenstein, nella sua recente Memoria, *Ueber einige Existenzprobleme der Variationsrechnung* (Methode der unendlichvielen Variabeln) [3], fondandosi sulla considerazione degli sviluppi in serie di Fourier e sfruttando la ben nota formula di Parseval, è giunto a stabilire l'esistenza della soluzione in certi problemi di Calcolo delle Variazioni, determinando precisamente i coefficienti degli sviluppi detti di tali soluzioni.

Riferendoci qui a quella parte del lavoro che tratta dei problemi nel piano (nei quali cioè la funzione incognita dipende da una sola variabile), vogliamo osservare che i teoremi d'esistenza in essa contenuti scendono tutti,

(1) Cfr. Pubbl. di Arcetri, fasc. 7, pag. 57.
(2) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1915.
(3) Journal für die reine und angewandte Mathematik (november, 1914).

ad eccezione di quello del § 4 (cap. I), come casi particolari dai teoremi da me enunciati in due Note inserite nei Comptes rendus del giugno 1914 ([1]).

Nel § 4 citato, il Lichtenstein si occupa delle soluzioni periodiche del problema di minimo studiato, e stabilisce la seguente proposizione: « Sia $F(x, y)$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, per tutti i valori reali di x e y; di più, valga sempre la relazione $F(x + 2\pi, y) = F(x, y)$, ed esista un numero positivo y_0 tale che, per ogni $y \geq y_0$, sia $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, e, per ogni $y \leq -y_0$, $\frac{\partial F}{\partial y} < 0$. Ciò posto, fra tutte le funzioni $y(x)$, continue insieme con la propria derivata prima e soddisfacenti alla uguaglianza $y(x + 2\pi) = y(x)$, ne esiste almeno una che rende minimo l'integrale $\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F(x, y) \right] dx$ ».

Nelle pagine che seguono, mi propongo di mostrare come il metodo da me indicato nelle Note sopra ricordate, permetta di trattare anche la questione delle soluzioni periodiche, e in modo assai più generale di quello che non sia consentito al Lichtenstein.

Non sarà poi male osservare che il mio metodo serve allo studio della medesima questione pure in quei problemi isoperimetrici dei quali è fatto cenno nelle mie Note citate, e fra i quali rientra, come caso particolarissimo, quello considerato dal Lichtenstein al cap. I, § 6 del suo lavoro.

1. Sia $f(x, y, y')$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei due primi ordini, in tutto il campo definito dalle disuguaglianze

$$(A) \qquad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < y' < +\infty. \end{cases}$$

Sia inoltre:

a) $f(a, y, y') = f(b, y, y')$, per tutti i valori ammessi per y e y';

b) $f_{y'y'} > 0$ in tutto il campo (A) ([2]);

c) $\left| \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \right| < y'^2 P(y) + Q(y)$, in tutti i punti di (A),

essendo $P(y)$ e $Q(y)$ due funzioni sottoposte alla sola condizione di essere

([1]) *Sur une méthode directe du Calcul des Variations*. La Memoria che contiene gli sviluppi degli enunciati di queste Note è uscita da poco nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; essa nel seguito verrà indicata con (T).

([2]) Si potrebbe considerare anche il caso che, invece della $f_{y'y'} > 0$, fosse verificata la $f_{y'y'} \geq 0$: non lo facciamo qui per semplificare i ragionamenti.

continue per ogni y finito; e si possano determinare dei numeri positivi (>0) N, M, α, l, in modo che si abbia

d) $f > -N$ in tutti i punti di (A), e $f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha} m(y)$ in tutti quelli del campo parziale

$$(A') \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -\infty < y < +\infty \\ |y'| \geq M, \end{cases}$$

essendo $m(y)$ una funzione continua, sempre maggiore di zero, tale che $|y|^{1+\alpha} m(y) \xrightarrow[|y| \to \infty]{} \infty$;

e) $y f_y \geq 0$ in tutto il campo definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $|y| \geq l$, $-\infty < y' < +\infty$. Ciò posto dimostriamo che

fra tutte le funzioni $y = y(x)$, *assolutamente continue nell'intervallo* (a, b) *e soddisfacenti alla condizione* $y(a) = y(b)$, *ve n'è almeno una che rende minimo l'integrale*

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

che ha le sue due prime derivate finite e continue e che soddisfa alla equazione differenziale di Eulero e alla relazione $y'(a) = y'(b)$ [*e quindi anche all'altra* $y''(a) = y''(b)$].

Indichiamo con $\{y(x)\}$ l'insieme delle funzioni $y(x)$ di cui si parla nell'enunciato precedente, e con $\{y(x)\}_l$ quello delle funzioni di $\{y(x)\}$ che hanno almeno un valore compreso fra $-l$ e l (estremi inclusi). Siano i e i_l i limiti inferiori dell'integrale J rispettivamente in $\{y(x)\}$ e $\{y(x)\}_l$. Dico che è $i = i_l$. Sia, infatti, $y(x)$ una funzione di $\{y(x)\}$ non appartenente a $\{y(x)\}_l$. La $y(x)$ dovrà necessariamente soddisfare in tutto (a, b) alla disuguaglianza $y(x) > l$, oppure all'altra $y < -l$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia soddisfatta la prima. Allora, detto m il minimo di $y(x)$ in (a,b), consideriamo la funzione definita dall'uguaglianza $\bar{y}(x) = y(x) - (m - l)$, la quale funzione, avendo il minimo uguale ad l, appartiene all'insieme $\{y(x)\}_l$. È

$$f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = f(x, y(x) - (m - l), y'(x)),$$

e per la condizione *e)*

$$f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \leq f(x, y(x), y'(x));$$

onde

$$\int_a^b f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\, dx \leq \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Questa disuguaglianza mostra che il limite inferiore i dell'integrale J in

$\{y(x)\}$ non può essere inferiore a quello i_l di J in $\{y(x)\}_l$. E poichè, d'altra parte, non può essergli inferiore, ne viene quanto avevamo asserito, $i = i_l$.

Dopo ciò, per i risultati del n. 33 della mia Memoria (T) citata, esiste in $\{y(x)\}_l$ una funzione $y_0(x)$, almeno, che rende minimo l'integrale J. E poichè, in seguito a quanto si è veduto or ora, $y_0(x)$ rende minimo J anche in $\{y(x)\}$, si può asserire (Cap. III della stessa Memoria) che $y_0(x)$ ha le sue due prime derivate finite e continue, e soddisfa all'equazione differenziale di Eulero. Per mostrare che è $y'_0(a) = y'_0(b)$, ricordiamo che $y_0(x)$ dà il minimo di J fra tutte le funzioni di $\{y(x)\}$, le quali, circa gli estremi dell'intervallo (a, b), sono sottoposte alla sola condizione $y(a) = y(b)$. La formula ai limiti, che dà la variazione di J relativa a $y_0(x)$, si riduce nel caso attuale a

$$(\delta J)_0 = f_{y'}(a, y_0(a), y'_0(a))\,(\delta y_0)_a, - f_{y'}(b, y_0(b) y'_0(b))\,(\delta y_0)_b,$$

e dovendo essere $(\delta J)_0 = 0$, $(\delta y_0)_a = (\delta y_0)_b$, risulta

$$f_{y'}(a, y_0(a), y'_0(a)) = f_{y'}(b, y_0(b), y'_0(b)) = f_{y'}(b, y_0(a), y'_0(b)),$$

ed anche per la condizione a),

$$f_{y'}(a, y_0(a), y'_0(a)) = f_{y'}(a, y_0(a), y'_0(b)).$$

Questa uguaglianza mostra, in forza della condizione b), che è $y'_0(a) = y'_0(b)$. La proposizione enunciata è dunque pienamente stabilita.

2. La condizione d) del numero precedente si è posta solo per poter applicare i risultati di (T). Ora vogliamo osservare che quei risultati valgono anche se alla condizione detta se ne sostituisce un'altra un po' più generale e precisamente:

d') se ad ogni numero positivo Y possono farsi corrispondere due numeri $\alpha(>0)$ e $M(>0)$, tali che, in tutto il campo (A'_Y) definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $|y| \leq Y$, $|y'| \geq M$, si abbia $f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha}$, e se, inoltre, fissato un qualsiasi Y, l'integrale J relativo ad una funzione assolutamente continua $y(x)$, avente almeno un valore minore in modulo di questo Y, tende a $+\infty$ col tendere all'infinito del massimo di $|y(x)|$.

Tale condizione risulta di certo verificata se si ha, p. es., $f(x, y, y') = \varphi(x, y') - \psi(x, y)$, con $\varphi(x, y') > c_1 |y'|^{1+\alpha_1+\alpha_2}$, $\psi(x, y) < c_2 |y|^{1+\alpha_1} + c_3$ ($c_1, c_2, c_3, \alpha_1, \alpha_2$, numeri > 0). Ed invero, avendosi [ved. n. 8 di (T)]

$$\int_a^b |y'|^{1+\alpha_1+\alpha_2}\,dx \geq \frac{1}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}}\,(\bar{\bar{y}} - \bar{y})^{1+\alpha_1+\alpha_2},$$

dove $\overline{\overline{y}}$, $\overline{y}$ rappresentano, rispettivamente, il massimo e il minimo di $y(x)$ in (a, b), si ha

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx = \int_a^b \varphi(x, y')\,dx - \int_a^b \psi(x, y)\,dx >$$

$$> c_1 \int_a^b |y'|^{1+\alpha_1+\alpha_2}\,dx - \int_a^b \{c_2 |y|^{1+\alpha_1} + c_3\}\,dx >$$

$$> \frac{c_1}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2}} (\overline{\overline{y}} - \overline{y})^{1+\alpha_1+\alpha_2} - c_2(b-a)(\overline{\overline{y}} - \overline{y} + \mathrm{Y})^{1+\alpha_1} - c_3(b-a),$$

dovendosi supporre che un valore almeno di $y(x)$ sia, in modulo $< \mathrm{Y}$. Ora, se il massimo di $|y(x)|$ tende all'∞, tende all'∞ anche $\overline{\overline{y}} - \overline{y}$; e poichè è $\alpha_2 > 0$, l'integrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ supera anch'esso qualsiasi limite (¹).

3. Sempre in merito alla condizione d), possiamo aggiungere che i risultati della Memoria (T) — eccettuati al più quelli relativi a campi limitati (²) e quegli altri concernenti i problemi isoperimetrici — restano ancora validi se la $f(x, y, y')$, invece di diventare infinita con $|y'| \to \infty$ di ordine $1 + \alpha > 1$ [come si è supposto in d) e in d')], lo diventa di ordine precisamente uguale a 1, purchè però si supponga sempre verificata la condizione c). Quest'ultima, poi, può in tutti i casi essere sostituita dall'altra, più generale,

$$\left| \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \right| < |y'|\,\mathrm{P}(y) \cdot f(x, y, y') + \mathrm{Q}(y),$$

ed anche dalla condizione che la derivata f_y diventi infinita, per $|y'| \to \infty$, di ordine non superiore a quello della f.

(¹) Così la condizione d') è soddisfatta se si ha $f = y'^2 - y$, oppure $f = y'^4 - y^2$, per le quali non è invece soddisfatta la d). La d') è ancora verificata se è $f = y'^2 - cy^2$, con $c < \dfrac{\pi^2}{(b-a)^2}$: è infatti

$$\int_a^b \{y'^2 - cy^2\}\,dx = \left\{1 - c\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right\} \int_a^b y'^2\,dx +$$

$$+ c\frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left\{y'^2 - \frac{\pi^2}{(b-a)^2} y^2\right\} dx \geq \left\{1 - c\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right\} \int_a^b y'^2\,dx \geq$$

$$\geq \left\{1 - c\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\right\} \cdot \frac{1}{(b-a)^2} (\overline{\overline{y}} - \overline{y})^2,$$

essendo, anche qui, $\overline{\overline{y}}$ e $\overline{y}$ il massimo e il minimo di $y(x)$ in (a, b).

(²) Nei quali cioè la y non può variare liberamente da $-\infty$ a $+\infty$.

4. Supponiamo ora che, invece della condizione e) sia soddisfatta quest'altra:

e') esistono quattro numeri $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$, tali che, nel campo definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq b$, $l_1 \leq y \leq l_2$, $-\infty < y' < +\infty$, sia $f_y < 0$ e in quello $a \leq x \leq b$, $l_3 \leq y \leq l_4$, $-\infty < y' < +\infty$, $f_y > 0$; inoltre, nei due campi detti la $f(x, y, y')$, come funzione di y', abbia un minimo assoluto per $y' = 0$ [1].

Siano poi verificate le condizioni a), b), c), d) del n. 1, per tutti i valori di x e y' ivi considerati, e per quelli di y compresi fra l_2 e l_3 (estremi inclusi) Dico che, *limitandosi alle funzioni* $y(x)$ *assolutamente continue in* (a, b) *e tali che sia* $y(a) = y(b)$ *e* $l_1 \leq y(x) \leq l_4$, *vale anche qui il teorema analogo a quello del n. 1.* Ed invero, analogamente a quanto si è fatto al n. 4, si può, ad ogni funzione $y(x)$ di cui si parla, sostituirne sempre un'altra $\overline{y}(x)$ soddisfacente alla nuova condizione di verificare, in tutto (a, b), la disuguaglianza $l_2 \leq \overline{y}(x) \leq l_3$. Se la $y(x)$ soddisfa già da sè a questa nuova condizione, non vi sarà che da porre $\overline{y}(x) \equiv y(x)$; in caso contrario, detto $\overline{x}$ un valore di (a, b) in cui è $y(x) > l_3$, si consideri il massimo intervallo di (a, b) che lo contiene e in cui è sempre $y(x) \geq l_3$, e si definisca in questo intervallo (e così in tutti gli analoghi) la $\overline{y}(x)$ ponendola uguale a l_3. Analogamente si proceda per quei punti in cui è $y(x) < l_2$. Nei punti rimanenti si porrà infine $\overline{y}(x) = y(x)$. La nuova funzione $\overline{y}(x)$ appartiene alla classe di quelle del nostro enunciato; di più dà all'integrale J un valore di certo non superiore a quello relativo a $y(x)$, come risulta chiaramente dalla condizione e'). Dopo ciò non vi è che da ripetere il ragionamento fatto al n. 1 [2].

6. Poniamoci di nuovo nelle condizioni del n. 1 [3], escludendo l'ipotesi e), e aggiungendo invece quest'altra: esistono due numeri h e k, il secondo dei quali sia > 0, in modo da aversi, in tutto il campo (A),

$$f(x, y, y') = k f(a + b - x \ , \ 2h - y, y'). \tag{1}$$

Allora, *fra tutte le funzioni* $y(x)$ *assolutamente continue che verificano la condizione* $y(a) = y\left(\frac{a+b}{2}\right) = y(b) = h$, *ve n'è almeno una che rende*

[1] Per es., la funzione $f = y'^2 + y^3 - y^2$ soddisfa alla nuova condizione e'), ma non alla e).

[2] In luogo della condizione e), può considerarsi anche la seguente: per ogni y maggiore in modulo di un certo Y, è $f(x, y, y') > |y|^\beta$, con $\beta > 0$, e ciò qualunque sia la x di (a, b) e la y' di $(-\infty, +\infty)$. Con questa condizione il teorema del n. 1 resta ancora vero.

[3] Naturalmente all'ipotesi d) può sempre sostituirsi la d'); e si possono anche tenere presenti le osservazioni del n. 3.

minimo l'integrale J, *che ha le due prime derivate finite e continue e che soddisfa all'equazione differenziale di Eulero e alla uguaglianza* $y'(a)=y'(b)$.

Per quanto è stabilito nella mia Memoria (T), esiste almeno una funzione $y_0(x)$, avente le due prime derivate continue e soddisfacente, in $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, all'equazione differenziale di Eulero, la quale inoltre verifica l'uguaglianza $y_0(a)=y_0\left(\frac{a+b}{2}\right)=h$ e rende minimo l'integrale

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x, y, y')\, dx$$

fra tutte le funzioni assolutamente continue che assumono in a e $\frac{a+b}{2}$ lo stesso valore h. Completiamo la $y_0(x)$ in $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ mediante l'uguaglianza

$$y_0(x)=2h-y_0(a+b-x). \tag{2}$$

La $y_0(x)$ risulta allora continua in tutto (a, b), insieme con le sue due prime derivate, e verifica le uguaglianze

$$y_0(a)=y_0\left(\frac{a+b}{2}\right)=y_0(b)=h \quad , \quad y_0'(a)=y_0'(b).$$

Inoltre essa soddisfa, in tutto (a, b), all'equazione differenziale di Eulero, come si vede subito fondandosi sulla (1) e sulla (2) e sul fatto che tale equazione è soddisfatta dalla $y_0(x)$ nel tratto $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$. Risulta poi immediatamente che la $y_0(x)$ dà il minimo richiesto.

6. Si supponga la funzione $f(x, y, y')$ definita non solo per i valori di x dell'intervallo (a, b), ma per tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, e sempre finita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, e soddisfacente alla uguaglianza

$$f(x+b-a, y, y')=f(x, y, y').$$

Ferme restando le condizioni poste al n. 1, dal teorema ivi stabilito si deduce *l'esistenza di almeno una funzione* $y_0(x)$: 1°) *sempre finita e continua, insieme con le sue due prime derivate*; 2°) *soddisfacente ovunque all'equazione di Eulero*; 3°) *verificante, per ogni* x, *l'uguaglianza*

$$y_0(x+b-a)=y_0(x)$$

e quindi anche le altre due

$$y_0'(x+b-a)=y_0'(x)\ ,\ y_0''(x+b-a)=y_0''(x)\ ;$$

4°) *rendente minimo l'integrale* $J=\int_a^b f(x\,,y\,,y')\,dx$ *fra tutte le funzioni assolutamente continue che soddisfano alla relazione* $y(x+b-a)=y(x)$.

E un teorema analogo si deduce da quello del n. 4.

È bene osservare che, qualunque sia δ, la funzione $y_0(x)$, per la sua periodicità, dà il minimo anche dell'integrale $\int_{a+\delta}^{b+\delta} f(x\,,y\,,y')\,dx$, relativamente alla stessa classe di funzioni sopra considerate. Questa osservazione permette di dimostrare direttamente il teorema sopra enunciato, e l'analogo dedotto da quello del n. 4, senza far uso della formula ai limiti adoperata al n. 1. Ed invero, una volta stabilita l'esistenza di una funzione *minimum*, soddisfacente alla condizione $y(a)=y(b)$ ed avente in $(a\,,b)$ le derivate prima e seconda finite e continue, l'osservazione precedente mostra senz'altro la validità delle due uguaglianze $y'(a)=y'(b)$ e $y''(a)=y''(b)$.

7. Anche dal teorema del n. 5, aggiungendo l'ipotesi fatta sulla f al principio del numero precedente, si deduce una proposizione d'esistenza per le soluzioni periodiche.

8. Infine, si possono ottenere dei teoremi d'esistenza per le soluzioni periodiche, analoghi a quelli stabiliti nelle mie Note *Sulle orbite periodiche* (¹).

Matematica. — *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici.* Nota I di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (²).

1. Il prof. G. Fubini, nella sua Memoria intitolata: *Equazioni integrali e valori eccezionali* (³), espone un metodo per la ricerca degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni di un nucleo simmetrico. Tale metodo però, se dal punto di vista teorico è molto semplice, da quello pratico, invece, presenta delle difficoltà, basandosi esso essenzialmente sulla conoscenza dei limiti superiore ed inferiore di un certo integrale.

Qui esponiamo un nuovo metodo, il quale, pur avendo con quello del prof. Fubini qualche punto di contatto, ha su questo il vantaggio di una maggior portata pratica.

(¹) Questi Rendiconti, 1912, pag. 251 e 332, 1° semestre.

(²) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.

(³) Annali di Matematica; tomo XVII della serie III, pag. 111 e seg.