ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

e quindi anche le altre due

$$y_0'(x+b-a)=y_0'(x)\ ,\ y_0''(x+b-a)=y_0''(x)\ ;$$

4°) *rendente minimo l'integrale* $J=\int_a^b f(x\,,y\,,y')\,dx$ *fra tutte le funzioni assolutamente continue che soddisfano alla relazione* $y(x+b-a)=y(x)$.

E un teorema analogo si deduce da quello del n. 4.

È bene osservare che, qualunque sia δ, la funzione $y_0(x)$, per la sua periodicità, dà il minimo anche dell'integrale $\int_{a+\delta}^{b+\delta} f(x\,,y\,,y')\,dx$, relativamente alla stessa classe di funzioni sopra considerate. Questa osservazione permette di dimostrare direttamente il teorema sopra enunciato, e l'analogo dedotto da quello del n. 4, senza far uso della formula ai limiti adoperata al n. 1. Ed invero, una volta stabilita l'esistenza di una funzione *minimum*, soddisfacente alla condizione $y(a)=y(b)$ ed avente in $(a\,,b)$ le derivate prima e seconda finite e continue, l'osservazione precedente mostra senz'altro la validità delle due uguaglianze $y'(a)=y'(b)$ e $y''(a)=y''(b)$.

7. Anche dal teorema del n. 5, aggiungendo l'ipotesi fatta sulla f al principio del numero precedente, si deduce una proposizione d'esistenza per le soluzioni periodiche.

8. Infine, si possono ottenere dei teoremi d'esistenza per le soluzioni periodiche, analoghi a quelli stabiliti nelle mie Note *Sulle orbite periodiche* (1).

Matematica. — *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici.* Nota I di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita (2).

1. Il prof. G. Fubini, nella sua Memoria intitolata: *Equazioni integrali e valori eccezionali* (3), espone un metodo per la ricerca degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni di un nucleo simmetrico. Tale metodo però, se dal punto di vista teorico è molto semplice, da quello pratico, invece, presenta delle difficoltà, basandosi esso essenzialmente sulla conoscenza dei limiti superiore ed inferiore di un certo integrale.

Qui esponiamo un nuovo metodo, il quale, pur avendo con quello del prof. Fubini qualche punto di contatto, ha su questo il vantaggio di una maggior portata pratica.

(1) Questi Rendiconti, 1912, pag. 251 e 332, 1° semestre.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.

(3) Annali di Matematica; tomo XVII della serie III, pag. 111 e seg.

2. È necessario premettere alcune considerazioni.

Sia $K(st)$ una funzione simmetrica delle variabili s e t, che supporremo essere finita e continua; pur non escludendo che possa presentare delle discontinuità tali, però, da non infirmare i risultati dello Schmidt [1].

Indicheremo con $H(st)$ il $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}$, dove $\gamma = \lim\limits_{n=\infty} \gamma_n$ e $\gamma_n = \dfrac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$; limite che, com'è noto [2], è una funzione continua positiva e non identicamente nulla. Analogamente con $H_1(st)$ il $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}$, il quale pure esiste finito e non identicamente nullo [3].

Supposto che λ_ν sia un autovalore di $K(st)$ e $\varphi_\nu(s)$ una sua corrispondente autofunzione, si moltiplichino successivamente i membri della seguente uguaglianza

$$\varphi_\nu(r) = \lambda_\nu \int_a^b K(rt)\, \varphi_\nu(t)\, dt$$

per $K(sr)\,dr$, e si integri da a a b. Dopo $2n$ integrazioni, s'otterrà

$$\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^{2n}} = \lambda_\nu \int_a^b K_{2n+1}(st)\, \varphi_\nu(t) dt\,;$$

ed ancora, dividendo ambo i membri per γ^n e passando al limite per $n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{(\lambda_\nu^2 \gamma)^n} = \lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt\,.$$

Ora, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ indicano gli autovalori di $K(st)$, disposti in ordine crescente rispetto al loro valore assoluto, è noto [4] che sussistono le relazioni

$$\lim_{n=\infty} (\lambda_\nu^2 \gamma)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = 1 \\ \infty & \text{se } \nu > 1 \end{cases};$$

(1) *Entwicklung willkürlicher functionen nach Systemen vorgeschriebener.* Inaugural Dissertation. Göttingen, 1905.

(2) Schmidt, loc. cit., § 11.

(3) Si ha infatti

$$H(st) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\gamma} \int_a^b K(sr)\, \frac{K_{2n+1}(rt)}{\gamma^n}\, dr = \frac{1}{\gamma} \int_a^b K(sr)\, H_1(rt)\, dr = \frac{1}{\gamma} \int_a^b H_1(sr) K(rt)\, dr$$

quindi, se $H_1(st)$ fosse identicamente nulla in s ed in t, tale dovrebbe pure essere anche $H(st)$; il che non è possibile.

(4) Si sa infatti che $\left|\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ è il minimo valore assoluto delle λ_ν.

sarà quindi

$$(1) \qquad \lambda_\nu \int_a^b \mathrm{H}_1(st)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \begin{cases} \varphi_\nu(s) & \text{se } \nu = 1 \\ 0 & \text{se } \nu > 1 \end{cases} \text{ [1]}.$$

Il nucleo $\mathrm{H}_1(st)$ non potrà perciò ammettere autovalori diversi da $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, e di fronte a questi si comporterà come $\mathrm{K}(st)$; inoltre i nuclei $\mathrm{H}_1(st)$ e $\mathrm{K}(st)$, per tali autovalori ammetteranno le stesse autofunzioni.

Dalle (1) infatti, risulta senz'altro che ogni autofunzione di $\mathrm{K}(st)$, corrispondente ad uno degli autovalori $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, lo è anche di $\mathrm{H}_1(st)$. Per dimostrare la proprietà inversa, basterà osservare che, se $\psi(s)$ è una autofunzione di $\mathrm{H}_1(st)$, cioè se

$$(2) \qquad \psi(s) = \lambda_1 \int_a^b \mathrm{H}_1(st)\,\psi(t)\,dt\,,$$

sarà

$$\psi(s) = \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}(sr)\,dr \int_a^b \mathrm{H}(rt)\,\psi(t)\,dt\,;$$

e poichè

$$\int_a^b \mathrm{H}(rt)\,\psi(t)\,dt = \psi(r)\,,$$

come si vede subito moltiplicando i membri della (2) per $\mathrm{H}(rs)\,ds$ ed integrando, sarà pure

$$\psi(s) = \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\psi(t)\,dt\,.$$

Dalle (1) risulta ancora che le autofunzioni di $\mathrm{K}(st)$ corrispondenti agli autovalori λ_ν $(\nu > 1)$, sono invece soluzioni dell'equazione

$$\int_a^b \mathrm{H}_1(st)\,\theta(t)\,dt = 0\,.$$

3. Noteremo ancora che se $\varphi_1'^{(r)}(s)$ e $\varphi_1''^{(r)}(s)$ rappresentano rispettivamente le p_1 e p_2 autofunzioni linearmente indipendenti normalizzate del nucleo $\mathrm{K}(st)$, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1' = +\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $\lambda_1'' = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, la $\mathrm{H}_1(st)$ può mettersi sotto la forma [2]

$$(3) \qquad \mathrm{H}_1(st) = \sum_{r=1}^{p_1} \frac{\varphi'^{(r)}(s)\,\varphi'^{(r)}(t)}{\lambda_1'} + \sum_{r=1}^{p_2} \frac{\varphi''^{(r)}(s)\,\varphi''^{(r)}(t)}{\lambda_1''}\,.$$

[1] Qui, per comodità, a λ_1 attribuiamo ambedue i valori $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

[2] Schmidt, loc. cit., § 8.

Posto ora

$$\int_a^b H_1(ss)\,ds = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n+1}(ss)}{\gamma^n}\,ds = \lim_{n=\infty}\frac{U_{2n+1}}{\gamma^n} = U' \ (^1),$$

dalla (3) si deduce intanto, ponendo $t=s$ ed integrando.

(4)
$$\frac{U'}{\sqrt{\gamma}} = p_1 - p_2 .$$

Nella (3) si muti s in r e si integri, dopo averne moltiplicati i membri per $H_1(sr)\,dr$. Essendo

$$\int_a^b H_1(sr)\,H_1(rt)\,dr = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n+1}(sr)}{\gamma^n}\,\frac{K_{2n+1}(rt)}{\gamma^n}\,dr =$$
$$= \lim_{n=\infty}\gamma\,\frac{K_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} = \gamma H(st),$$

avremo, ricordando che $\lambda_1'^2\gamma = \lambda_1''^2\gamma = 1$,

$$H(st) = \sum_{r=1}^{p_1}\varphi'^{(r)}(s)\,\varphi'^{(r)}(t) + \sum_{r=1}^{p_2}\varphi''^{(r)}(s)\,\varphi''^{(r)}(t).$$

E poichè (²)

$$\int_a^b H(ss)\,ds = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n}(ss)}{\gamma^n}\,ds = \lim_{n=\infty}\frac{U_{2n}}{\gamma^n} = U \geq 1 ,$$

avremo infine, mediante integrazione da a a b, dopo aver posto $t=s$,

(5)
$$U = p_1 + p_2 .$$

Dalle (4) e (5) si ricavano per p_1 e p_2 i seguenti valori

(6)
$$p_1 = \frac{1}{2}\left(U + \frac{U'}{\sqrt{\gamma}}\right) \quad ; \quad p_2 = \frac{1}{2}\left(U - \frac{U'}{\sqrt{\gamma}}\right).$$

Nel caso poi che $K(st)$ ammetta uno soltanto dei due valori $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$

(¹) U' è una quantità finita. Infatti dall'uguaglianza $H_1(st) = \int_a^b K(sr)\,H(rt)\,dr$, facendo $t=s$ ed integrando, si ha l'altra: $U' = \int_b^b\int_a^b K(sr)\,H(sr)\,dr\,ds$; da cui, per la disuguaglianza dello Schwarz, si deduce

$$U'^2 \leq U_2 \cdot \int_a^b\int_a^b [H(sr)]^2\,ds\,dr.$$

(²) Schmidt, loc. cit., § 11.

come autovalore, uno dei due numeri p_1 e p_2 sarà nullo; dovrà quindi, sussistere una delle due seguenti uguaglianze

$$U \pm \frac{U'}{\sqrt{\gamma}} = 0 ;$$

le quali ci forniscono un criterio per riconoscere *a priori* quale dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ è ammesso dal nucleo $K(st)$ come autovalore.

4. Ciò posto, si consideri la funzione simmetrica

$$F^{(2)}(st) = K(st) - H_1(st) ,$$

la quale, come ora dimostreremo, ha gli stessi autovalori e le stesse autofunzioni di $K(st)$, eccettuato il solo autovalore $|\lambda_1| = \left|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$ e le corrispondenti autofunzioni.

Invero, se λ_ν è un autovalore di $K(st)$ e $\varphi_\nu(s)$ una sua corrispondente funzione, sarà

$$\lambda_\nu \int_a^b F^{(2)}(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \lambda_\nu \int_a^b K(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt - \lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt ;$$

e poichè

$$\lambda_\nu \int_a^b H_1(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \begin{cases} \varphi_\nu(t) & \text{se} \quad \nu = 1 \\ 0 & \text{se} \quad \nu > 1 \end{cases},$$

avremo, se $\nu = 1$,

$$(7) \qquad \lambda_1 \int_a^b F^{(2)}(st)\, \varphi_1(t)\, dt = 0$$

per ogni autofunzione $\varphi_1(s)$ corrispondente all'autovalore λ_1;
e se $\nu > 1$,

$$\lambda_\nu \int_a^b F^{(2)}(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \lambda_\nu \int_a^b K(st)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \varphi_\nu(t) .$$

Quindi tra gli autovalori e le autofunzioni di $F^{(2)}(st)$, figureranno gli stessi valori λ_ν e le stesse $\varphi_\nu(s)$ $(\nu > 1)$.

Inversamente, se λ è un autovalore di $F^{(2)}(st)$ e $\psi(s)$ una sua corrispondente autofunzione, sarà

$$\lambda \int_a^b F^{(2)}(st)\, \psi(t)\, dt = \lambda \int_a^b K(st)\, \psi(t)\, dt - \lambda \int_a^b H_1(st)\, \psi(t)\, dt = \psi(s) .$$

E poichè, moltiplicando il primo e l'ultimo membro per $\varphi_1(s)\,ds$ ed integrando, si ottiene, per la (7),

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\psi(s)\,ds = 0\,,$$

sarà anche

$$\int_a^b \mathrm{H}_1(st)\,\psi(t)\,dt = 0\;;$$

a quindi

$$\lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\psi(t)\,dt = \psi(s)\;;$$

il che prova che λ e $\psi(s)$ sono anche rispettivamente un autovalore ed una autofunzione di $\mathrm{K}(st)$.

Rimandiamo il seguito ad un'altra Nota.

Matematica. — *Sulle superficie di 6° ordine contenenti infinite coniche.* Nota II di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre [1].

Nella Nota presente, sèguito di quella pubblicata a pag. di questi Rendiconti, enumero i tipi di F^6 irriducibili luoghi di coniche che ho trovato seguendo la via indicata nella Nota anzidetta. Essi son divisi in gruppi a seconda del genere p (variabile da 0 a 4) del fascio di coniche T che si considera sulla F^6; ciascun gruppo è diviso in sottogruppi, anzitutto, a seconda del genere π della sezione piana generica, ed ulteriormente prendendo di mira i caratteri proiettivi della sviluppabile formata dai piani delle coniche, e talora anche quelli della linea multipla della F^6. In alcune parti la classificazione è spinta molto innanzi; altrove (specialmente per superficie razionali) è solo iniziata. Per molte delle superficie trovate è riportata l'equazione in un sistema di coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3, la quale permette di verificare facilmente l'esistenza sulla superficie delle singolarità descritte; per altre, è data solo una costruzione geometrica che ne renda evidente l'esistenza. Si ricordi infine che, salvo esplicito avviso contrario, si tratta sempre di superficie normali in S_3.

1. — F^6 con un fascio di coniche di genere 4.

Esistono sulla F^6 due punti tripli uniplanari A, B, a ciascuno dei quali è successiva una retta tripla infinitesima; le coniche stanno a terne

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1915.