ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

E poichè, moltiplicando il primo e l'ultimo membro per $\varphi_1(s)\,ds$ ed integrando, si ottiene, per la (7),

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\psi(s)\,ds = 0\,,$$

sarà anche

$$\int_a^b \mathrm{H}_1(st)\,\psi(t)\,dt = 0\,;$$

a quindi

$$\lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\,\psi(t)\,dt = \psi(s)\,;$$

il che prova che λ e $\psi(s)$ sono anche rispettivamente un autovalore ed una autofunzione di $\mathrm{K}(st)$.

Rimandiamo il seguito ad un'altra Nota.

Matematica. — *Sulle superficie di 6° ordine contenenti infinite coniche.* Nota II di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre [1].

Nella Nota presente, sèguito di quella pubblicata a pag. di questi Rendiconti, enumero i tipi di F^6 irriducibili luoghi di coniche che ho trovato seguendo la via indicata nella Nota anzidetta. Essi son divisi in gruppi a seconda del genere p (variabile da 0 a 4) del fascio di coniche T che si considera sulla F^6; ciascun gruppo è diviso in sottogruppi, anzitutto, a seconda del genere π della sezione piana generica, ed ulteriormente prendendo di mira i caratteri proiettivi della sviluppabile formata dai piani delle coniche, e talora anche quelli della linea multipla della F^6. In alcune parti la classificazione è spinta molto innanzi; altrove (specialmente per superficie razionali) è solo iniziata. Per molte delle superficie trovate è riportata l'equazione in un sistema di coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3, la quale permette di verificare facilmente l'esistenza sulla superficie delle singolarità descritte; per altre, è data solo una costruzione geometrica che ne renda evidente l'esistenza. Si ricordi infine che, salvo esplicito avviso contrario, si tratta sempre di superficie normali in S_3.

1. — F^6 con un fascio di coniche di genere 4.

Esistono sulla F^6 due punti tripli uniplanari A, B, a ciascuno dei quali è successiva una retta tripla infinitesima; le coniche stanno a terne

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1915.

nei piani passanti per la retta AB, e coniche complanari si toccano in A ed in B. Non vi sono linee multiple, onde le sezioni piane generiche sono di genere 10. L'equazione della F^6 si può scrivere:

$$x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^2 \varphi_2(x_0, x_1) + x_2 x_3 \varphi_4(x_0, x_1) + \varphi_6(x_0, x_1) = 0,$$

dove $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6$ son forme delle variabili indicate dei gradi espressi dai loro indici [1]. Come caso speciale i punti A, B possono anche coincidere.

2. — F^6 con un fascio di coniche di genere 3.

Si possono ripartire in tre gruppi a seconda del genere π delle sezioni piane generiche.

$\pi = 9$. — Le coniche stanno a coppie nei piani passanti per una retta r, doppia per F, contenente due punti quadrupli triplanari A, B: il cono tangente ad F in A (ad es.) si spezza in due piani per r, ed in un terzo piano (da contar 2 volte), che contiene nell'intorno di A una retta doppia infinitesima di F, e che è toccato in A da tutte le coniche del fascio. L'equazione di F è:

$$x_2^2 x_3^2 \varphi_2(x_0, x_1) + x_2 x_3 \varphi_4(x_0, x_1) + \varphi_6(x_0, x_1) = 0.$$

Come caso speciale i punti A, B possono coincidere.

$\pi = 8$. — 1°) F ha una conica doppia contenente due punti tripli uniplanari A, B, ciascuno dei quali ha nel suo intorno una retta tripla infinitesima. Le coniche stanno a terne nei piani per la retta AB; coniche complanari si toccano in A ed in B. L'equazione di F è:

$$x_0^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_0 Q \varphi_3(x_0, x_1) + Q^2 \varphi_2(x_0, x_1) + Q^3 = 0,$$

dove Q è una quadrica [2]. La conica doppia può spezzarsi, i punti A, B possono coincidere: si hanno così in tutto 4 casi particolari.

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani passanti per una retta r, che esse incontrano nei due medesimi punti A, B. La retta r è doppia tacnodale, e lungo essa vi è un piano tangente fisso σ; i punti A, B sono quadrupli biplanari: il cono tangente ad F in A (o in B) si compone di σ contato due volte, e di un altro piano (pure contato due volte) che contiene nell'intorno di A una retta doppia infinitesima di F, la cui equazione è:

$$\varphi_6(x_0, x_1) + Q \cdot \varphi_4(x_0, x_1) + x_1^2 Q^2 = 0.$$

I punti A, B possono coincidere.

[1] Simili spiegazioni sono in seguito sottintese.

[2] Idem, ibid.

$\pi = 7$. — L'equazione di F è ora la seguente:

$$x_1^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_1^2(x_3^2 + x_1 x_2)\, \varphi_2(x_0, x_1) + \\ + x_1(x_3^2 + x_1, x_2)^2\, \varphi_1(x_0, x_1) + (x_3^2 + x_1, x_2)^3 = 0;$$

essa mostra che le coniche stanno a terne nei piani passanti per una retta r, che esse toccano in un punto fisso A, triplo per F. Esiste poi una retta doppia oscnodale s, uscente da A (e distinta da r), lungo la quale rs è piano tangente fisso.

3. — F^6 con un fascio di coniche di genere 2.

Il genere π delle sezioni piane generiche può essere 7, 6, 5.

$\pi = 7$. — F ha una conica doppia, una retta doppia e su questa due punti quadrupli A, B; le sue coniche stanno a coppie nei piani per la retta AB, e passano per A, B. Equazione:

$$x_3^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_3 Q \varphi_3(x_0, x_1) + Q^2 \varphi_2(x_0, x_1) = 0.$$

I punti A, B possono coincidere; la conica doppia (irriducibile o spezzata) può anche stare in un piano passante per r: si hanno quindi molti casi speciali.

La conica doppia può anche degenerare in due rette doppie consecutive alla r: F ha allora una retta doppia oscnodale col piano tangente o variabile da punto a punto, oppure fisso, ed in quest'ultimo caso esistono ancora su r i punti quadrupli A, B (distinti o no). L'equazione di F è nei due casi:

$$\varphi_6(x_0, x_1) + (x_0 P + x_1 Q)\, \varphi_3(x_0, x_1) + (x_0 P + x_1 Q)^2 = 0,$$
$$\varphi_6(x_0, x_1) + x_1 Q \varphi_3(x_0, x_1) + x_1^2 Q^2 = 0.$$

$\pi = 6$. — 1°) Le coniche stanno a terne nei piani per una retta r, che esse incontrano in due punti fissi A, B. Vi sono due coniche doppie passanti per A, B, che sono punti tripli uniplanari, ognuno dei quali ha nel suo intorno una retta tripla infinitesima. L'equazione di F è:

$$x_0^2 x_1^2 \varphi_2(x_0, x_1) + x_0 x_1 Q \psi_2(x_0, x_1) + Q^2 \theta_2(x_0, x_1) + Q^3 = 0.$$

Si hanno 10 casi speciali secondochè i punti tripli A, B son distinti o no, e le coniche doppie sono irriducibili o spezzate, distinte o coincidenti in una conica doppia tacnodale.

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani passanti per una retta r, doppia per F, che esse toccano in un punto fisso A, quadruplo per F, al quale è successivo (nella direzione r) un altro punto quadruplo. Si hanno

poi altre tre rette doppie, concorrenti in un punto, una delle quali incidente ad r in A; esse possono non esser tutte distinte. L'equazione di F è:

$$x_0^2 x_2^2 \varphi_2(x_0, x_1)) + x_2 x_3 (x_3 + h x_0) \varphi_3(x_0, x_1) + \\ + x_3^2 (x_3 + h x_0)^2 \psi_2(x^0, x_1) = 0 .$$

Può darsi anche che r sia una retta doppia tacnodale a piano tangente fisso, contenente due punti quadrupli A, B (distinti o no), comuni a tutte le coniche di F; ed allora F, di equazione:

$$x_0^2 \varphi_4(x_0, x_1) + x_0 Q \varphi_3(x_0, x_1) + x_1^2 Q^2 = 0 ,$$

ha inoltre una conica doppia, passante per A e B, irriducibile o no, che può anche ridursi a due rette doppie consecutive alle prime due.

$\pi = 5$. — 1°) Le coniche stanno a terne nei piani per una retta r, su cui F ha due punti tripli consecutivi A = B, comuni a tutte le coniche. La linea doppia si compone d'una retta doppia oscnodale uscente da A, e d'una conica doppia passante per A, B, che può anche ridursi a due rette doppie consecutive alle prime tre. Equazione:

$$x_0^2 x_1^2 (a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2) + x_0 x_1 (x_3^2 + x_0 x_2)(b_0 x_0^2 + b_1 x_0 x_1 + b_2 x_1^2) + \\ + (x_3^2 + x_0 x_2)^3 \left(c_0 x_0^2 + c_1 x_0 x_1 + \frac{b_2^2}{4 a_2} \right) + (x_3^2 + x_0 x_2)^3 = 0 .$$

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani per una retta r, doppia per F, che esse toccano in un punto fisso A. Esistono poi due rette doppie d, d_1, uscenti da A, ed una retta doppia tacnodale incidente alle d, d_1, lungo la quale si ha un piano tangente fisso. L'equazione di F è:

$$x_0^2 x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3^2 \varphi_3(x_0, x_1) + x_3^4 \varphi_2(x_0, x_1) = 0 .$$

Le rette d, d_1 possono coincidere in una retta doppia tacnodale a piano tangente fisso.