ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

***pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1915.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie di rotolamento e le trasformazioni di Ribaucour.* Nota del prof. L. P. EISENHART (dell'Università di Princeton), presentata dal Socio LUIGI BIANCHI [1].

In una Nota [2], pubblicata nei Rendiconti di questa R. Accademia, Bianchi ha definito come *superficie di rotolamento* la superficie descritta da un punto invariabilmente connesso ad una superficie S_0, quando questa rotola sopra una superficie applicabile S, detta *superficie d'appoggio*, il movimento dipendendo da due parametri. Egli ha dimostrato che, data una superficie Σ, il problema di trovare le coppie di superficie applicabili S_0 ed S, tali che Σ sia superficie di rotolamento quando S_0 rotola sopra S, si riduce alla integrazione di un'equazione a derivate parziali del secondo ordine e di un'equazione di Riccati. In una Nota successiva [3], Bianchi considera il caso che la superficie Σ sia una superficie isoterma.

Si sa che Darboux [4] ha stabilito l'esistenza di trasformazioni D_m di una superficie isoterma Σ in altre superficie isoterme Σ_1, tali che Σ ed

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1915.

(2) *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (seduta del 4 gennaio 1914). Viene qui citata come Nota 1.

(3) *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento* (seduta del 21 febbraio 1915), qui citata come Nota 2.

(4) *Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les surfaces isothermiques* [Annales de l'École Normale Supérieure, IIIe série, tome XVI (1899)]. Ved. anche Bianchi, Annali di matematica, serie 3a, tomi XI e XII (1905).

una sua trasformata Σ_1 formano le due falde di un inviluppo di sfere a due parametri, le linee di curvatura corrispondendosi sopra Σ, Σ_1, ed a queste corrispondendo un sistema coniugato sulla superficie luogo dei centri delle sfere. Darboux trovò che la determinazione di queste trasformazioni D_m dipende dalla integrazione di un sistema differenziale lineare, completamente integrabile.

Nella Nota 2, Bianchi ha dimostrato che ogni trasformazione D_m di una superficie isoterma Σ dà luogo ad una soluzione del corrispondente problema di rotolamento, nella quale la superficie luogo dei centri delle sfere è la superficie d'appoggio S, e la rotolante S_0 resta intrinsecamente definita dalla proprietà che il sistema coniugato comune ad S e S_0 è appunto quello che corrisponde alle linee di curvatura di Σ.

Ora Ribaucour ha considerato, in generale, gli inviluppi di sfere a due parametri tali che le linee di curvatura si corrispondono sulle due falde dell'inviluppo. Diremo che queste due falde derivano l'una dall'altra per una *trasformazione di Ribaucour*. Evidentemente una trasformazione D_m di una superficie isoterma è una trasformazione di Ribaucour.

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare che le trasformazioni D_m sono le uniche trasformazioni di Ribaucour che diano al tempo stesso una soluzione del problema di rotolamento.

2. Sia Σ una superficie, riferita alle sue linee di curvatura (u, v); r_1, r_2 indichino i raggi principali di curvatura normale; X_3, Y_3, Z_3 i coseni di direzione della normale a Σ, e

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare. Sia M un punto variabile sopra Σ, ed M_0 il corrispondente punto sulla superficie (rotolante) S_0, nel senso indicato da principio, situato quindi sulla normale alla Σ in M. Se adunque x, y, z sono le coordinate cartesiane di M, e x_0, y_0, z_0 quelle di M_0, avremo

$$x_0 = x + RX_3 \quad , \quad y_0 = y + RY_3 \quad , \quad z_0 = z + RZ_3 \, ,$$

dove R è una funzione di u, v da determinarsi.

Definiamo le funzioni h_1, h_2 colle formole

$$h_1 = \sqrt{E}\left(1 + \frac{R}{r_2}\right) \quad , \quad h_2 = \sqrt{G}\left(1 + \frac{R}{r_1}\right). \tag{2}$$

Bianchi ha dimostrato (Nota 1) che R deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{h_1 R}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{h_2 R}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \sqrt{EG}\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\}, \tag{3}$$

e che, inversamente, ogni soluzione di questa fornisce una superficie S (d'appoggio) per la superficie Σ come superficie di rotolamento.

3. Ho altrove dimostrato (¹) che le trasformazioni di Ribaucour di una superficie Σ dipendono dalle soluzioni del seguente sistema differenziale:

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\sqrt{\mathrm{E}}\,\alpha \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\sqrt{\mathrm{G}}\,\beta \\
&\frac{\partial\mu}{\partial u}=\sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{\alpha}{r_2} \quad , \quad \frac{\partial\mu}{\partial v}=\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{\beta}{r_1} \\
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\beta-\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{r_2}\mu+n\sigma(p+\sqrt{\mathrm{E}}) \ , \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\beta \\
&\frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\alpha \ , \quad \frac{\partial\beta}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\alpha-\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{r_1}\mu+n\sigma(q+\sqrt{\mathrm{G}}) \\
&\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}=p\,\frac{\alpha}{\lambda} \quad , \quad \frac{\partial\log\sigma}{\partial v}=q\,\frac{\beta}{\lambda} \\
&\frac{\partial p}{\partial v}=q\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}-\frac{\beta}{\lambda}(p+\sqrt{\mathrm{E}})\right] \\
&\frac{\partial q}{\partial u}=p\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}-\frac{\alpha}{\lambda}(q+\sqrt{\mathrm{G}})\right],
\end{aligned}\right.
$$

tali che si abbia

$$(5)\qquad \alpha^2+\beta^2+\mu^2=2n\lambda\sigma,$$

dove n indica una costante. Quando una soluzione è nota, il raggio della corrispondente sfera inviluppante è dato da

$$(6)\qquad \mathrm{R}=-\frac{\lambda}{\mu},$$

e l'elemento lineare della trasformata Σ_1 è

$$(7)\qquad ds_1^2=p^2\,du^2+q^2\,dv^2 .$$

4. Ora dalla (6), derivando, si trova, per le (4),

$$\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial u}=-\frac{\alpha}{\mu}h_1 \quad , \quad \frac{\partial\mathrm{R}}{\partial v}=-\frac{\beta}{\mu}h_2,$$

e, nella ipotesi che questo valore di R soddisfi alla (3), dovremo avere

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{\alpha}{\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{\beta}{\lambda}\right)=\sqrt{\mathrm{EG}}\left\{\frac{\mu^2}{\lambda^2}-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\right\}.$$

(¹) *Transformations of surfaces of Guichard and surfaces applicable to quadrics.* (Annali di matematica, ser. 3ª, tomo XXII, pp. 194-197).

Calcolando colle (4) e (5), questa si riduce alla

$$p\sqrt{G} + q\sqrt{E} = 0\,, \tag{8}$$

nella quale, come al solito, $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ indicano i valori positivi dei radicali. Lo stesso significato avendo $\sqrt{E_1}$, $\sqrt{G_1}$, dove E_1, G_1 sono i corrispondenti coefficienti per la superficie trasformata Σ_1, abbiamo due diversi casi da considerare, e cioè

$$p = \sqrt{E_1}\quad,\quad q = \sqrt{G_1}\,, \tag{9}$$

ovvero l'altro

$$p = -\sqrt{E_1}\quad,\quad q = \sqrt{G_1}\,. \tag{10}$$

Ma il caso (9) è incompatibile colla (8), per la convenzione sui segni dei radicali; e resta quindi solo il caso (10), nel quale la (8) diventa

$$\sqrt{E}\cdot\sqrt{G_1} = \sqrt{G}\cdot\sqrt{E_1}\,.$$

Siccome le linee di curvatura sono le linee coordinate sopra Σ e Σ_1, ne segue che la rappresentazione dell'una superficie sull'altra è *conforme*. Ma Darboux ha dimostrato (loc. cit.) che le trasformazioni D_m delle superficie isoterme e quelle di Ribaucour colle sfere ortogonali ad una sfera fissa sono le uniche trasformazioni di Ribaucour per le quali la corrispondenza è conforme. Nello stesso tempo egli ha provato che per le trasformazioni del secondo tipo è il caso (9) che si presenta. Concludiamo quindi:

Le trasformazioni D_m *delle superficie isoterme sono le uniche trasformazioni di Ribaucour che dànno una soluzione del problema delle superficie di rotolamento.*

In una Nota successiva stabilirò un teorema, in certo modo duale di questo, che cioè le trasformazioni E_m delle superficie con rappresentazione isoterma delle linee di curvatura sono le uniche trasformazioni di Ribaucour che dànno una soluzione del problema degli *inviluppi di rotolamento*, per usare la terminologia usata da Bianchi in due Note in questi Rendiconti (1).

(1) Vol. 23, pag. 3; e vol. 24, pp. 366-369.