ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulla necessità della condizione di Weierstrass per l'estremo degli integrali doppî.* Nota di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI [1].

La teoria dei massimi e dei minimi degli integrali doppî, quale è esposta nei trattati più noti, presenta molte lacune: manca, ad esempio, la dimostrazione che la condizione di Weierstrass è necessaria. Per quanto tale dimostrazione non presenti difficoltà di natura essenziale, può essere utile l'esporla brevemente.

1. Supponiamo che l'integrale di cui si cerca l'estremo sia

$$(1)\quad \mathrm{I}[z]=\iint_{\mathrm{C}} f(x\,y\,z\,p\,q)\,dx\,dy \quad ; \quad z=z(xy)\ ,\ p=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\ ;$$

dove C rappresenta un'area assegnata del piano xy che si suppone limitata da una curva regolare c, $f(x\,y\,z\,p\,q)$ è una funzione finita e continua colle derivate dei primi due ordini in un certo campo R dello spazio $(x\,,y\,,z)$ e per valori arbitrarii di p e di q. Sia $z=\zeta(xy)$ una funzione avente le derivate prime finite e continue, che dia ad (1) il massimo o il minimo valore rispetto alle superficie di un certo intorno di ordine 0, le quali assumono gli stessi valori sul contorno c di C.

Poniamo $\pi(xy)=\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\chi=\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}$; e in generale conveniamo che quando in una funzione contenente z e le sue derivate, si sostituiscono a queste ζ e le derivate corrispondenti, si indichi il risultato della sostituzione colla lettera greca corrispondente alla latina con cui quella è indicata.

Sappiamo che $\zeta(xy)$ deve essere tale che, per qualunque funzione $\omega(xy)$ avente derivate prime finite, sia

$$(2)\qquad \iint_{\mathrm{C}} [\varphi_z\,\omega+\varphi_p\,\omega_x+\varphi_q\,\omega_y]\,dx\,dy=0\ ;$$

e si sa che perciò, se si ammette che $\zeta(xy)$ abbia pure le derivate seconde, essa deve essere un estremale, e cioè soddisfare all'equazione di Lagrange

$$(3)\qquad \varphi_z-\frac{\partial}{\partial x}\varphi_p-\frac{\partial}{\partial y}\varphi_q=0\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1915.

Ammettiamo soddisfatta questa condizione: e dimostriamo che *affinchè* $\zeta(xy)$ *dia a* $\mathrm{I}[z]$ *per es. il valore minimo, occorre che in ogni punto* $x_0\, y_0$ *interno a* C *e per tutti i valori di* α *e* β

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{E}(x_0\,, y_0\,, \zeta_0\,, \pi_0+\alpha\,, \chi_0+\beta\ ;\ \pi_0\,, \chi_0) = \\ &= f(x_0\,, y_0\,, \zeta_0\,, \pi_0+\alpha\,, \chi_0+\beta) - \varphi(x_0\, y_0) - \\ &\qquad - \alpha\,\varphi_p(x_0\, y_0) - \beta\,\varphi_q(x_0\, y_0) \geqq 0\ ; \end{aligned}$$

dove $\zeta_0 = \zeta(x_0\, y_0)\,,\ \pi_0 = \pi(x_0\, y_0)\,,\ \chi_0 = \chi(x_0\, y_0)$, *e come si disse* $\varphi(x_0\, y_0) = f(x_0\, y_0\, \zeta_0\, \pi_0\, \chi_0)$ *ecc.*

2. Per semplificare i calcoli che seguono, osserviamo che ci si può sempre ridurre al caso in cui $\alpha > 0\,,\ \beta = 0\,,\ x_0 = y_0 = 0$. Quando ciò non sia, poniamo

$$(5)\qquad \alpha = \varrho\cos\theta\quad,\quad \beta = \varrho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\qquad\qquad \varrho > 0\ ;$$

e facciamo il cambiamento di variabili

$$(6)\qquad x = x_0 + x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta\qquad y = y_0 + x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta\,.$$

Aggiungendo un apice indicheremo le quantità relative alle nuove variabili; così C′ indicherà il campo corrispondente a C nelle variabili $(x'y')$, sarà

$$(7)\qquad \begin{aligned} &z'(x'y') = z(xy) = \\ &= z(x_0 + x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ y_0 + x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta)\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} p' &= \frac{\partial z'(x'y')}{\partial x'} = \quad p\cos\theta + q\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \\ q' &= \frac{\partial z'(x'y')}{\partial y'} = - p\,\mathrm{sen}\,\theta + q\cos\theta\,. \end{aligned}\right.$$

ed analogo significato avranno $\zeta'\,, \pi'\,, \chi'$. La funzione $\zeta'(x'y')$ darà il minimo all'integrale

$$(9)\qquad \mathrm{I}'[z'] = \iint_{\mathrm{C}'} f'(x'\,y'\,z'\,p'\,q')\,dx'\,dy'\,,$$

dove

$$(10)\qquad \begin{aligned} &f'(x'\,y'\,z'\,p'\,q') = f(x\,y\,z\,p\,q) = \\ &= f(x_0 + x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ y_0 + x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta\,, \\ &\qquad z'\,, p'\cos\theta - q'\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ p'\,\mathrm{sen}\,\theta + q'\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

D'altra parte indicando ancora con E′ la funzione analoga a E costrutta mediante la f' e la ζ' avremo identicamente da (8) e (10)

$$\begin{aligned}(11)\qquad & \mathrm{E}(x_0\,, y_0\,, \zeta_0\,, \pi_0 + \alpha\,, \chi_0 + \beta\,; \pi_0\,, \chi_0) = \\ & = \mathrm{E}'(0\,, 0\,, \zeta'_0\,, \pi'_0 + \varrho\,, \chi'_0\,; \pi'_0\,, \chi'_0)\,;\end{aligned}$$

cosicchè per dimostrare la (4), basterà dimostrare la disuguaglianza

$$\mathrm{E}'(0\,, 0\,, \zeta'_0\,, \pi'_0 + \varrho\,, \chi'_0\,; \pi'_0\,, \chi'_0) \geq 0\,,$$

che è l'analoga della (4) per l'integrale (9), e per $\alpha = \varrho > 0$, $\beta = 0$, $x_0 = y_0 = 0$.

Ci limiteremo dunque a dimostrare che per il minimo, occorre che

$$\begin{aligned}(12)\qquad & \mathrm{E}(0\,, 0\,, \zeta_0\,, \pi_0 + \alpha\,, \chi_0\,; \pi_0\,, \chi_0) = \\ & = f(0\,, 0\,, \zeta_0\,, \pi_0 + \alpha\,, \chi_0) - \varphi(0\,, 0) - \alpha\,\varphi_p(0\,, 0) \geq 0\,; \qquad \alpha > 0.\end{aligned}$$

3. Ciò posto, prendiamo due numeri a e b positivi e tali che il rettangolo di vertici $(0\,, -a)\,, (b\,, -a)\,, (b\,, a)\,, (0\,, a)$ sia interno a C: e sia ε un numero tale che

$$0 < \varepsilon < a \quad , \quad \varepsilon^3 < b\,.$$

Il rettangolo R_ε di vertici $(0\,, -\varepsilon)\,, (b\,, -\varepsilon)\,, (b\,, \varepsilon)\,, (0\,, \varepsilon)$ è allora interno a C: ed il punto $(\varepsilon^3\,, 0)$ è interno a R_ε. Costruiamo allora una funzione variata $z(x\,, y\,; \varepsilon)$ colle regole seguenti:

1°) nel campo $\mathrm{C} - \mathrm{R}_\varepsilon$ sia

$$(13)\qquad z(x\,, y\,; \varepsilon) = \zeta(x\,, y)\,;$$

2°) nel triangolo T_ε di vertici $(0\,, -\varepsilon)\,, (\varepsilon^3\,, 0)\,, (0\,, \varepsilon)$ sia

$$(14)\qquad z(xy\,; \varepsilon) = \zeta(x\,, y) + \alpha x\,;$$

3°) nel campo $\mathrm{R}_\varepsilon - \mathrm{T}_\varepsilon$ (che è un poligono concavo di 5 lati) poniamo

$$(15)\qquad z(xy\,; \varepsilon) = \zeta(xy) + \omega(xy\,; \varepsilon)\,,$$

dove $\omega(xy\,; \varepsilon)$ è una funzione avente le derivate prime quasi ovunque e soddisfacente in $\mathrm{R}_\varepsilon - \mathrm{T}_\varepsilon$ alle disuguaglianze

$$(16)\qquad |\omega(xy\,; \varepsilon)| < l\varepsilon^2 \quad , \quad \left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right| \leq l\varepsilon^2 \quad , \quad \left|\frac{\partial\omega}{\partial y}\right| \leq l\varepsilon^2\,,$$

e che sul contorno del campo $\mathrm{R}_\varepsilon - \mathrm{T}_\varepsilon$ prende gli stessi valori già dati dalle formule (13), (14); e cioè sui tre lati r_ε appartenenti al contorno di R_ε è nulla; mentre sui due lati t'_ε, t''_ε di T_ε, i quali rispettivamente congiungono i punti $(0\,, -\varepsilon)$ $(\varepsilon^3\,, 0)$ e $(0\,, \varepsilon)$ $(\varepsilon^3\,, 0)$ e quindi hanno le equazioni

$$(17)'\qquad x = \varepsilon^2(y + \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad (17)''\qquad x = -\,\varepsilon^2(y - \varepsilon)\,,$$

prende i valori

$$(18)' \qquad \alpha\varepsilon^2(y+\varepsilon) \qquad \text{e} \qquad (18)'' \qquad -\alpha\varepsilon^2(y-\varepsilon)$$

rispettivamente. Per dare un esempio del modo in cui tale funzione può costruirsi, si ponga ad esempio,

$$\omega(x, y; \varepsilon) = \alpha\varepsilon^2(y+\varepsilon) \quad \text{nel triangolo } T_{1\varepsilon} \text{ di vertici } (0, -\varepsilon), (\varepsilon^3, 0), (b, -\varepsilon)$$

$$\omega(x, y; \varepsilon) = -\alpha\varepsilon^2(y-\varepsilon) \quad \text{nel triangolo } T_{2\varepsilon} \text{ di vertici } (0, \varepsilon), (\varepsilon^3, 0), (b, \varepsilon)$$

$$\omega(x, y; \varepsilon) = \alpha\varepsilon^3\frac{x-b}{\varepsilon^3-b} \quad \text{nel triangolo } T_{3\varepsilon} \text{ di vertici } (\varepsilon^3, 0), (b, \varepsilon), (b, -\varepsilon).$$

Si verifica subito che con tale definizione valgono le (16) e risultano soddisfatte tutte le altre condizioni.

Assegnato un intorno arbitrario di ordine 0 della $z = \zeta(xy)$, è chiaro che per ε convenientemente piccolo, la $z = z(xy; \varepsilon)$ appartiene a detto intorno: dovrà quindi essere $I[z(xy; \varepsilon)] - I[\zeta(xy)] \geq 0$, e quindi pure

$$(19) \qquad \lim_{\varepsilon=0}\frac{I[z(xy; \varepsilon)] - I[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} \geq 0.$$

Andremo ora a calcolare tale limite.

4. Indichiamo con $I_{1\varepsilon}[z], I_{2\varepsilon}[z], I_{3\varepsilon}[z]$ i tre integrali analoghi a (1) estesi ai tre campi $C - R_\varepsilon, T_\varepsilon, R_\varepsilon - T_\varepsilon$ rispettivamente. Sarà identicamente

$$(20) \qquad I[z] = I_{1\varepsilon}[z] + I_{2\varepsilon}[z] + I_{3\varepsilon}[z].$$

Per (13) intanto sarà evidentemente

$$(21) \qquad I_{1\varepsilon}[z(x, y; \varepsilon)] = I_{1\varepsilon}[\zeta(x, y)].$$

Inoltre si ha per (14)

$$(22) \qquad \frac{I_{2\varepsilon}[z(x, y; \varepsilon)] - I_{2\varepsilon}[\zeta(x, y)]}{\varepsilon^4} = \frac{1}{\varepsilon^4}\iint_{T_\varepsilon}\{f(x, y, \zeta+\alpha x, \pi+\alpha, \chi) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)\}\,dx\,dy.$$

Ma si ha

$$(23) \quad \begin{cases} f(x, y, \zeta+\alpha x, \pi+\alpha, \chi) = f(0, 0, \zeta_0, \pi_0+\alpha, \chi_0) + \\ \quad + x\dfrac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}+\alpha\bar{x}, \bar{\pi}+\alpha, \bar{\chi})}{dx} + y\dfrac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}+\alpha\bar{x}, \bar{\pi}+\beta, \bar{\chi})}{dy} \\ f(x, y, \zeta, \pi, \chi) = f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0) + \\ \quad + x\dfrac{df(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{\zeta}}, \bar{\bar{\pi}}, \bar{\bar{\chi}})}{dx} + y\dfrac{df(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \zeta, \bar{\bar{\pi}}, \bar{\bar{\chi}})}{dy}; \end{cases}$$

dove $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ sono coppie di valori del tipo $(\theta x, \theta y)$ con $\theta < 1$, $\bar{\zeta}, \bar{\bar{\zeta}}$, ecc. i valori delle funzioni $\zeta, \pi, \ldots$ calcolati in detti punti, ed i simboli $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{df}{dy}$ indicano le derivate totali di f rapporto a x e y. Se chiamiamo M il massimo valore assoluto delle derivate parziali prime di $f(xyzpq)$ per i valori di (x, y) in R_ε, e per $z = \zeta(x, y)$, $p = \pi(x, y)$, $q = \chi(x, y)$, o per $z = \zeta(x, y) + \alpha x$, $p = \pi(x, y) + \alpha$, $q = \chi(x, y)$ e μ il massimo valore delle derivate prime e seconde di $\zeta(xy)$ nel campo stesso, avremo quindi da (23)

$$(24)\quad \big|\{f(x, y, \zeta + \alpha x, \pi + \alpha, \chi) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)\} -$$
$$- \{f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0)\}\big| < M_1 [|x| + |y|]$$

con

$$M_1 = 2M(1 + 3\mu + \alpha).$$

E quindi, osservando che in T_ε è $|x| \leq \varepsilon^3 < \varepsilon$, $|y| \leq \varepsilon$, e che l'area di T_ε è ε^4 avremo, sostituendo in (22),

$$\left|\frac{I_{2\varepsilon}[z(xy ; \varepsilon)] - I_{2\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} - \{f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0)\}\right| <$$
$$< \frac{1}{\varepsilon^4} M_1 \iint_{T_\varepsilon} [|x| + |y|]\, dx\, dy \leq 2 M_1 \varepsilon .$$

Onde infine si avrà

$$(25)\quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{2\varepsilon}[z(xy ; \varepsilon)] - I_{2\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} =$$
$$= f(0, 0, \zeta_0, \pi_0 + \alpha, \chi_0) - f(0, 0, \zeta_0, \pi_0, \chi_0) .$$

5. Resta che calcoliamo la parte relativa a $I_{3\varepsilon}$: e cioè, per (15), il limite

$$(26)\quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{3\varepsilon}[z(xy ; \varepsilon)] - I_{3\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} =$$
$$= \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon^4} \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [f(x, y, \zeta + \omega, \pi + \omega_x, \chi + \omega_y) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)]\, dx\, dy .$$

Ora si ha

$$(27)\quad \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [f(x, y, \zeta + \omega, \pi + \omega_x, \chi + \omega_y) - f(x, y, \zeta, \pi, \chi)]\, dx\, dy =$$
$$= \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [\varphi_z\, \omega + \varphi_p\, \omega_x + \varphi_q\, \omega_y]\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} \Big\{ \bar{f}_{z^2}\, \omega^2 + 2\, \bar{f}_{zp}\, \omega\, \omega_x +$$
$$+ 2\, \bar{f}_{zq}\, \omega\, \omega_y + \bar{f}_{p^2}\, \omega_x^2 + 2 \bar{f}_{pq}\, \omega_x\, \omega_y + \bar{f}_{q^2}\, \omega_y^2 \Big\}\, dx\, dy ;$$

dove $\bar{f}_{z^2} \ldots$ sono valori delle derivate seconde di $f(x, y, z, p, q)$ in punti della forma $(x, y, \zeta + \theta\omega, \pi + \theta\omega_x, \chi + \theta\omega_y)$. Se quindi N è il massimo valore assoluto delle derivate seconde di $f(x, y, z, p, q)$ in un intorno dei valori per cui xy è in R_ε, $z = \zeta(xy)$, $p = \pi(xy)$, $q = \chi(xy)$, avremo per (16), se ε è sufficientemente piccolo

$$(28)\quad \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} \left\{ \bar{f}_{z^2}\,\omega^2 + 2\bar{f}_{zp}\,\omega\,\omega_x + \cdots + \bar{f}_{y^2}\,\omega_y^2 \right\} dx\,dy < $$
$$< g\,N\,l^2\,\varepsilon^4 \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} dx\,dy < g\,N\,l^2\,b\,\varepsilon^5,$$

poichè l'area di $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ è minore di quella di R_ε e cioè di $b\varepsilon$.

D'altra parte integrando per parti al modo di Lagrange nel primo termine del secondo membro di (27), e rammentando che ζ soddisfa la (3), e che $\omega(xy)$ è nulla sul contorno di $R_\varepsilon - T_\varepsilon$ fuorchè sui segmenti t'_ε e t''_ε di equazioni (17), in cui essa assume i valori (18), avremo

$$(29)\quad \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [\varphi_z\,\omega + \varphi_p\,\omega_x + \varphi_q\,\omega_y]\,dx\,dy =$$
$$= \alpha\varepsilon^2 \left[\int_0^{-\varepsilon} (y + \varepsilon)\,[\varphi'_p - \varphi'_q\,\varepsilon^2]\,dy - \int_\varepsilon^0 (y - \varepsilon)\,[\varphi''_p + \varphi''_q\,\varepsilon^2] \right] dy,$$

dove φ'_p, φ'_q indicano le φ_p, φ_q calcolate nei punti $(17)'$, e φ''_p e φ''_q quelle calcolate nei punti $(17)''$. Ma per le ipotesi da noi fatte è sempre in R_ε

$$|\varphi_q(xy)| < M$$
$$|\varphi_p(xy) - \varphi_p(0\,0)| < 4\,N\,\mu\,[|x| + |y|];$$

quindi avremo per (29)

$$(30)\quad \left| \iint_{R_\varepsilon - T_\varepsilon} [\varphi_z\,\omega + \varphi_p\,\omega_x + \varphi_q\,\omega_y]\,dx\,dy + \alpha\varepsilon^4\,\varphi_p(0\,0) \right| =$$
$$= \left| \alpha\varepsilon^2 \left[\int_0^{-\varepsilon} (y + \varepsilon) \left\{ [\varphi'_p - \varphi_p(0\,0)] - \varphi'_q\,\varepsilon^2 \right\} dy - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_\varepsilon^0 (y - \varepsilon) \left\{ [\varphi''_p - \varphi_p(0\,0)] + \varphi''_q\,\varepsilon^2 \right\} dy \right] \right| \leq$$
$$\leq \alpha\varepsilon^2 \left[(8\,N\,\mu\,\varepsilon^2 + M\,\varepsilon^3) \int_{-\varepsilon}^0 dy + (8\,N\,\mu\,\varepsilon^2 + M\,\varepsilon^3) \int_0^\varepsilon dy \right] \leq$$
$$\leq \alpha\varepsilon^5 (16\,N\,\mu + 2\,M\,\varepsilon),$$

poichè nei punti di t'_ε e t''_ε è sempre $|x| + |y| < 2\varepsilon$.

Da (26), (27), (28) e (30) deduciamo

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{3\varepsilon}[z(xy\,;\,\varepsilon)] - I_{3\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} = -\alpha\varphi_p(0\,0)\,. \tag{31}$$

Per (21), (25), (31) la disuguaglianza (19) si traduce nella (12), la quale risulta pertanto dimostrata.

6. È chiaro che dalla condizione di Weierstrass si deduce come per le funzioni di una variabile quella di Legendre.

Inoltre, quando si volesse confrontare la $z = \zeta(xy)$ solo con quelle funzioni $z(xy)$, le quali soddisfacciano ad es. ad una limitazione della forma $(p-\pi)^2 + (q-\chi)^2 \leq m$, basterebbe nella disuguaglianza (4) supporre $\alpha^2 + \beta^2 \leq m$.

Geometria. — *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* Nota II di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO (1).

In questa Nota si assegnano le superficie algebriche d'ordine $n = 6$, con infinite coniche tali che i loro piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 3$, ovvero $\mu = 2$. Essa dunque, insieme con un'altra mia Nota (2), completa la classificazione delle superficie algebriche d'ordine $n = 6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu > 1$.

1. Sia γ una superficie algebrica irriducibile d'ordine $n = 6$, avente un fascio (3) di coniche (k) generalmente irriducibili.

Indichiamo con (π) l'inviluppo (irriducibile) costituito dai piani di queste, con μ la sua classe, e con s il numero di coniche di (k) esistenti in un piano generico di (π).

È noto (4) essere

$$12 = 2\mu s + \delta + 2\delta', \tag{1}$$

ove δ è il numero dei punti doppi dell'involuzione I^1_2 secata dalle coniche di (k) sopra una sezione piana generica c di γ; e δ' è il numero di quei punti (distinti o no) di c, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta I^1_2.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1915.

(2) *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª (1915)].

(3) È noto essere un fascio ogni sistema (necessariamente) ∞^1 irriducibile di coniche (generalmente irriducibili) esistente sopra una superficie algebrica d'ordine $n > 4$. Vedi De Franchis, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, serie 3ª (1906)].

(4) Vedi il mio studio *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, ser. 5ª, vol. VIII, (1915)], n.° 2.