ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Da (26), (27), (28) e (30) deduciamo

$$(31) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \frac{I_{3\varepsilon}[z(xy\,;\,\varepsilon)] - I_{3\varepsilon}[\zeta(xy)]}{\varepsilon^4} = -\alpha\varphi_p(0\,0)\,.$$

Per (21), (25), (31) la disuguaglianza (19) si traduce nella (12), la quale risulta pertanto dimostrata.

6. È chiaro che dalla condizione di Weierstrass si deduce come per le funzioni di una variabile quella di Legendre.

Inoltre, quando si volesse confrontare la $z = \zeta(xy)$ solo con quelle funzioni $z(xy)$, le quali soddisfacciano ad es. ad una limitazione della forma $(p-\pi)^2 + (q-\chi)^2 \leq m$, basterebbe nella disuguaglianza (4) supporre $\alpha^2 + \beta^2 \leq m$.

Geometria. — *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* Nota II di Giuseppe Marletta, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo [1].

In questa Nota si assegnano le superficie algebriche d'ordine $n = 6$, con infinite coniche tali che i loro piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 3$, ovvero $\mu = 2$. Essa dunque, insieme con un'altra mia Nota [2], completa la classificazione delle superficie algebriche d'ordine $n = 6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu > 1$.

1. Sia γ una superficie algebrica irriducibile d'ordine $n = 6$, avente un fascio [3] di coniche (k) generalmente irriducibili.

Indichiamo con (π) l'inviluppo (irriducibile) costituito dai piani di queste, con μ la sua classe, e con s il numero di coniche di (k) esistenti in un piano generico di (π).

È noto [4] essere

$$(1) \qquad 12 = 2\mu s + \delta + 2\delta',$$

ove δ è il numero dei punti doppi dell'involuzione I_2^1 secata dalle coniche di (k) sopra una sezione piana generica c di γ; e δ' è il numero di quei punti (distinti o no) di c, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta I_2^1.

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1915.

[2] *Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª (1915)].

[3] È noto essere un fascio ogni sistema (necessariamente) ∞^1 irriducibile di coniche (generalmente irriducibili) esistente sopra una superficie algebrica d'ordine $n > 4$. Vedi De Franchis, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, serie 3ª (1906)].

[4] Vedi il mio studio *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle di ordine 5* [Atti dell'Accademia Gioenia, Catania, ser. 5ª, vol. VIII, (1915)], n.° 2.

Si noti, inoltre, che, indicando con p_c il genere di c, e con p_i il genere di I_2^1, cioè di (k), è (per la formula di Zeuthen) $\delta = 2(p_c + 1) - 4p_i$.

§ 1.

2. Sia $\mu = 3$.

Giacchè è $\delta > 0$ e $\delta' \geq 0$, dalla (1) si deduce $s = 1$.

Inoltre, siccome certamente esistono piani tangenti a tre coniche di (k), ma non a tutte le coniche di questo *fascio*, così è sempre $\delta \geq 3$; anzi $\delta \geq 4$ e, quindi, $\delta' < 2$.

3. Cominciamo a supporre che (π) sia gobbo (e quindi razionale).

Per $\delta' = 0$ la (1) dà $\delta = 6$, e quindi (n.° 1) $p_c = 2$.

Dunque γ è proiezione della superficie γ_1, dell'S_5, rappresentata, nel piano, dal sistema lineare $|\lambda^4{}_{1^2,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7}|$, ove i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche di γ_1, rappresentate dal fascio $|\lambda_1^1|$, generano una varietà (a tre dimensioni) la quale, come facilmente si dimostra, è d'ordine tre. Proiettando dunque γ_1 da una retta generica, dell'S_5 ambiente, in uno spazio ordinario, si ottiene una superficie γ avente un fascio di coniche (k), e i piani di queste costituiscono un inviluppo gobbo di classe $\mu = 3$.

4. Per $\delta' = 1$ la (1) dà $\delta = 4$, e quindi (n.° 1) $p_c = 1$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{1,\,2,\,3}|$. I piani delle coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^4|$, generano una varietà (a tre dimensioni) d'ordine quattro. Ne segue che, per ottenere la superficie γ in esame, basta proiettare γ_1 da un piano ω che incontri (genericamente) un solo π_1 dei piani generatori della detta varietà. La traccia, nello spazio ordinario su cui si proietta, dell'$S_4 \equiv \omega\pi_1$, è quella retta (doppia per γ) che, contata due volte, è una conica del fascio (k) proiezione di (k_1).

5. Supponiamo, ora, che l'inviluppo (π) sia conico, e indichiamo con V il suo punto-base, punto che o non appartiene a γ, ovvero è triplo per questa e punto-base per (k).

Sia $p_i = 0$, cioè (π) sia razionale.

Ragionando come nel n.° 3, si dimostra che, per $\delta' = 0$, γ è proiezione di una superficie γ_1, dell'S_5, rappresentata nel piano dal sistema $|\lambda_1^{1^2,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7}|$, ove i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 non sono in posizione generica tra loro, ma come ora si dirà.

Se i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 appartengono ad una stessa conica c', questa è immagine di una conica c_1 di γ_1, sulla quale le coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^4|$, segnano un'involuzione (quadratica); sia V_1 il centro di questa. È chiaro che, proiettando γ_1 da una retta generica, si ottiene nello spazio ordinario una superficie γ avente un fascio di coniche (k), i

cui piani inviluppano un cono razionale di classe $\mu = 3$; e il vertice V di questo cono, proiezione di V_1, non appartiene a γ.

6. Se supponiamo, in particolare, che i 7 punti (n.° 5) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 giacciano in una stessa conica c', questa rappresenta un punto V_1 che è triplo per γ_1 e punto-base per il fascio (k_1). Ne segue che, proiettando γ_1 da una retta generica, si ottiene una superficie γ con un fascio di coniche (k), i cui piani inviluppano un cono razionale di classe $\mu = 3$; il vertice di questo cono è un punto V triplo per γ e punto-base per (k).

7. Sia ora $\delta' = 1$, pur essendo ancora (π) razionale; sarà $\delta = 4$, e, quindi, $p_c = 1$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{1,2,3}|$.

a) Siano 1, 2, 3 in posizione generica tra loro. Allora le coniche di γ_1 del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda^1_1|$, punteggiano proiettivamente le rette sghembe aventi per immagini il punto 1 e la retta $\lambda^1_{2,3}$; le congiungenti i punti omologhi generano quindi una schiera rigata. Ebbene, si scelga come piano centro di proiezione un piano generico ω che incontri (in un sol punto P non di γ_1) questa schiera rigata, e si proietti γ_1 in uno spazio ordinario Σ; si otterrà la superficie γ richiesta. Infatti per P passa una generatrice g della schiera trasversale di quella detta poco sopra, generatrice che è incontrata da tutti i piani delle coniche di (k_1). Ne segue che per il punto V, traccia in Σ dello spazio ωg, passeranno tutti i piani delle coniche del fascio (k) proiezione di (k_1). Inoltre quella conica di (k_1), complanare con P, dà la retta doppia di γ, retta che, contata due volte, è una conica di (k); evidentemente l'inviluppo (π) dei piani delle coniche di (k), è razionale e di classe $\mu = 4 - 1 = 3$. Si noti, infine, che il punto V non appartiene a γ.

b) Supponiamo, invece, che i punti 1 e 2 siano infinitamente vicini tra loro, onde γ_1 è dotata di un punto doppio V_1 che è punto-base per (k_1). In questo caso, proiettando γ_1 da un piano ω che incontri genericamente un (solo) piano di una conica di (k_1), si ottiene una superficie γ con un fascio (k) di coniche, i cui piani inviluppano un cono razionale e di classe $\mu = 4 - 1 = 3$. Inoltre esiste una retta doppia di γ, la quale, contata due volte, è conica di (k). Si noti, infine, che il vertice V, del detto cono, è triplo per γ e punto-base per (k).

8. Supponiamo ora $p_i = 1$, cioè che l'inviluppo (π) sia ellittico. Per $\delta' = 0$, dalla (1) segue $\delta = 6$ e, quindi (n.° 1), $p_c = 4$. L'esistenza della superficie γ si può dimostrare con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel n.° 8 della mia Nota citata per la prima. Comunque, eccone dimostrata l'esistenza per altra via [1].

[1] Ancora: l'esistenza di γ è contemplata nel seguente teorema generale (che dimostrerò in un mio prossimo lavoro): *Per $s = t$, $n = 2\mu$ e (k) dotato di punto-base, la superficie γ esiste.*

a) Stabilendo un'omografia tra i piani di uno spazio ordinario Σ e le quadriche, di un altro spazio ordinario Σ', passanti per sei punti generici di un cono cubico ellittico γ', si viene a stabilire fra Σ e Σ' una trasformazione doppia, in virtù della quale a γ' corrisponde in Σ una superficie γ d'ordine $n = 6$, con un fascio ellittico (k) di coniche i cui piani inviluppano un cono (ellittico) di classe $\mu = 3$ [1]. Il vertice di questo cono è, evidentemente, il punto V di Σ corrispondente a V', punto V che, dunque, è triplo per γ e punto-base per (k).

b) Fra i piani di un inviluppo (π) ellittico di classe $\mu = 3$, e le quadriche di un fascio $(\varkappa)$, esista una corrispondenza (2, 1), tale che esistano due piani di (π), ad ognuno dei quali corrisponda in $(\varkappa)$ una quadrica (degenere) della quale quel piano sia parte. Il luogo della conica comune a due elementi omologhi è, a prescindere dai detti due piani, la superficie γ richiesta.

Secondo che il vertice V del cono inviluppato da (π) appartiene ovvero no alla base di $(\varkappa)$, V sarà triplo per γ e punto-base per (k), ovvero non appartiene a γ.

9. Per $\delta' = 1$ è $\delta = 4$, e, quindi, $p_c = 3$.

Da quanto è noto [2] circa le superficie a sezioni piane di genere tre, la superficie γ esiste.

a) Sia γ_1 la superficie, dell'S_6, rappresentabile sul cono cubico ellittico mediante il sistema lineare delle curve segate dalle quadriche che toccano il cono in un punto fisso [3]. Proiettando γ_1 da uno generico dei piani incidenti essa in due punti, e incidenti il piano di una conica del fascio (ellittico) di coniche esistente in γ_1 stessa, si ottiene la superficie γ richiesta. La proiezione di detta conica sarà la retta doppia di γ che, contata due volte, è una conica del fascio di coniche (k) esistente in γ. I piani di queste coniche inviluppano, evidentemente, un cono ellittico di classe $\mu = 6 - 3 = 3$, il cui vertice V è triplo per γ e punto-base per (k).

b) La superficie γ è una di quelle studiate dal prof. Scorza [4]. In questo caso il vertice V, del cono inviluppato dai piani di (π), non appartiene a γ.

[1] Infatti la quartica base del fascio di quadriche passanti pei sopradetti sei punti, per il vertice V' di γ', e per un punto generico (di Σ'), seca ulteriormente γ' in $4 \cdot 3 - 6 = 3 = 3$ punti, onde nel detto fascio esistono tre (sole) quadriche che contengano generatrici di γ'.

[2] Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXV (1890)]; e Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere 3* [Annali di matematica, ser. 3ª, tomo XVI].

[3] Castelnuovo, loc. cit., n.° 9.

[4] Scorza, loc. cit., n.i 26 e 50.

§ 2.

10. Sia $\mu = 2$.

Giacchè è $\delta > 0$ e $\delta' \geq 0$, dalla (1) si deduce $s < 3$.

11. Sia $s = 1$.

Cominciamo dall'osservare che il vertice V del cono quadrico, inviluppato dai piani di (π), o è doppio per γ e non punto-base per (k), ovvero è quadruplo per γ e punto-base per (k).

Dalla (1), inoltre, si deduce (n.° 2) $\delta' < 3$.

Per $\delta' = 0$ la (1) dà $\delta = 8$ e, quindi, (n.° 1) $p_c = 3$.

a) La superficie γ è dunque [1] proiezione della superficie γ_1, dell'S_4, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_1^{5}{}_{3,\,2,\,3,\,4,\,\ldots\ldots,\,11}|$, coi punti $1, 2, 3, 4, \ldots, 11$ in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^1|$, costituiscono un S_0-cono quadrico, e il vertice V_1 di questo è doppio per γ_1. Proiettando dunque γ_1 da un punto generico dell'S_4 ambiente, si ottiene una superficie γ con un fascio di coniche (k) i cui piani inviluppano un cono quadrico, e il vertice V di questo è doppio per γ e non punto-base per (k).

b) Se, in particolare, i punti 2, 3, 4, 5, 6 sono collineari, siccome la loro retta rappresenta un punto V_1 quadruplo per γ_1 e punto-base per (k_1), così la proiezione di γ_1 sarà una superficie γ con un fascio di coniche (k) i cui piani inviluppano un cono quadrico, e il vertice V di questo è quadruplo per γ e punto-base per (k).

12. Per $\delta' = 1$ è $\delta = 6$ e quindi $p_c = 2$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_5, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_1^{4}{}_{2,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7}|$.

a) Se i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sono in posizione generica tra loro, siccome i piani delle coniche del fascio (k_1), rappresentato da $|\lambda_1^1|$, generano una varietà cubica, proiettando γ_1 da una generica retta incidente uno (solo) π_1 di questi piani, si ottiene una superficie γ con un fascio di coniche (k) i cui piani inviluppano un cono quadrico, e il vertice V di questo è doppio per γ e non punto-base per (k).

b) Se, invece, i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 appartengono ad una stessa conica, allora, proiettando γ_1 come ora si detto, V risulta quadruplo per γ e punto-base per (k).

In ambedue i casi la traccia, nello spazio di γ, dello spazio ordinario individuato da π_1 e dalla retta centro di proiezione, è la retta doppia di γ, tale che, contata due volte, sia conica di (k).

13. Per $\delta' = 2$ è $\delta = 4$ e, quindi, $p_c = 1$.

La superficie γ è dunque proiezione della superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda_{1,\,2,\,3}^{3}|$, qualora si scelga, come piano

[1] Castelnuovo, loc. cit.

centro di proiezione, uno generico ω dei piani, dell'S_6, incidenti, genericamente, due dei piani delle coniche del fascio (k_1) rappresentato da $|\lambda_1^1|$. Le tracce, nello spazio di γ, degli spazî a quattro dimensioni individuati da questi due piani con ω, sono due rette doppie per γ e, contate due volte, coniche del fascîo (k) proiezione di (k_1).

Il vertice V del cono quadrico inviluppato da (π), sarà

a) doppio per γ e non punto-base per (k), in generale;

b) mentre se i punti 1 e 2 sono infinitamente vicini tra loro, V sarà quadruplo per γ e punto-base per (k).

14. Sia, infine, $s = 2$, e, quindi, $\delta = 4$ e $\delta' = 0$.

L'ulteriore intersezione di γ con un piano generico di (π) è una conica irriducibile, la quale genera, al variare del piano, un fascio razionale (k') distinto da (k). Ne segue che γ è razionale, e, quindi, anche (k) sarà razionale; dunque è $p_c = 1$.

Ciò posto, si consideri la superficie γ_1, dell'S_6, rappresentata nel piano dal sistema lineare $|\lambda^3_{1,2,3}|$, ove i punti 1 e 2 sono infinitamente vicini tra loro. Indi si assegni un'omografia tra le coppie di una g^1_2 del fascio $|\lambda^1_1|$, e le rette del fascio $|\lambda^1_3|$. Una coppia e una retta omologhe costituiscono l'immagine di una sezione iperpiana di γ_1. Si ottengono, così, ∞^1 iperpiani tali che per un punto generico, dell'S_6 ambiente, ne passano due (soli), onde essi appartengono tutti ad un S_3. Proiettando quindi γ_1 da un piano generico di questo spazio, si ottiene la superficie γ richiesta; il vertice V del cono quadrico inviluppato dai piani delle coniche di (k), sarà doppio per γ e punto-base per (k).

15. Dallo studio fatto possiamo concludere che

le superficie d'ordine $n = 6$, con infinite coniche i cui piani costituiscano un inviluppo di classe $\mu = 3$ ovvero $\mu = 2$, sono le diciassette superficie date nei numeri 3, 4, 5, 6, 7 (a, b), 8 (a, b), 9 (a, b), 11 (a, b), 12 (a, b), 13, $(a, b,)$ 14.