ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici.* Nota II di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

5. Calcoliamo i nuclei iterati di $F^{(2)}(st)$ [2]; si ha

$$F_2^{(2)}(st) = \int_a^b [K(sr) - H_1(sr)]\,[K(rt) - H_1(rt)]\,dr\,;$$

essendo

$$\int_a^b K(sr)\,H_1(rt)\,dr = \lim_{n=\infty} \int_a^b K(sr)\,\frac{K_{2n+1}(rt)}{\gamma^n}\,dr =$$

$$= \gamma \lim_{n=\infty} \frac{K_{2n+2}(st)}{\gamma^{n+1}} = \gamma H(st)\,,$$

ed anche (ved. § 3)

$$\int_a^b H_1(sr)\,H_1(rt)\,dr = \gamma H(st)\,,$$

otterremo

$$F_2^{(2)}(st) = K_2(st) - \gamma H(st)\,.$$

Analogamente

$$F_3^{(2)}(st) = K_3(st) - \gamma H_1(st)\,;$$

ed in generale

$$F_{2n}^{(2)}(st) = K_{2n}(st) - \gamma^n H(st)$$

$$F_{2n+1}^{(2)}(st) = K_{2n+1}(st) - \gamma^n H_1(st)\,.$$

Posto ora

$$U'_{2n} = \int_a^b \int_a^b \{F_n^{(2)}(st)\}^2\,ds\,dt \quad ; \quad \Gamma_2^{(n)} = \frac{U'_{2n+1}}{U'_{2n}}\,,$$

sarà

$$U'_{4n+2} = U_{4n+2} - \gamma^{2n+1}\,U$$

$$U'_{4n} = U_{4n} - U\gamma^{2n}\,U\,;$$

da cui

$$\Gamma_2^{(n)} = \gamma\,\frac{\dfrac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} - U}{\dfrac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} - U}\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.
[2] Ved. la mia Nota I.

Ed ancora, posto

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 \lim_{n=\infty} \boldsymbol{\Gamma}_2^{(n)} ,$$

si avrà

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = \gamma \lim_{n=\infty} \frac{\dfrac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} - U}{\dfrac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} - U} .$$

E poichè il minimo modulo degli autovalori di $F^2(st)$ è $\left|\dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\Gamma}_2}}\right|$, avremo, per $|\lambda_2|$, la seguente espressione:

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\sqrt{\gamma}|} \left| \lim_{n=\infty} \frac{\dfrac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} - U}{\dfrac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} - U} \right|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\sqrt{\gamma}|} \left| \lim_{n=\infty} R_n^{(1)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (^1) .$$

Si presentano ora tre casi:

1°) $\lim\limits_{n=\infty} R_n^{(1)} = 1$, e quindi $|\lambda_2| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\right|$. Il nucleo $K(st)$ ammette allora ambedue i valori $+\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $-\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$, come autovalori;

2°) $\lim\limits_{n=\infty} R_n^{(1)} > 1$ e finito; si ha allora per $|\lambda_2|$ un valore maggiore di $|\lambda_1|$ (²);

3°) il rapporto $R_n^{(1)}$ non tende ad alcun limite; allora la ricerca degli autovalori è esaurita, e $K(st)$ ammette uno solo dei due valori $\pm \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$, come autovalori. Questo caso si presenta quando $F^{(2)}(st) = 0$; le costanti γ_n di $K(st)$ sono allora tutte eguali tra loro, ed i due termini di $R_n^{(1)}$ sono sempre nulli, qualunque sia n.

6. Supposto che quest'ultimo caso non si verifichi, si consideri la funzione

$$F^{(3)}(st) = F^{(2)}(st) - H_1^{(2)}(st) ,$$

(¹) Si osservi che essendo $\dfrac{U_{4n+2}}{\gamma^{2n+1}} \leq \dfrac{U_{4n}}{\gamma^{2n}} \leq U$ (Schmidt, loc. cit., § 11), il rapporto $R_n^{(1)}$, per ogni n finito, è sempre positivo: tale dovrà quindi essere anche il suo limite, quando esiste. Inoltre, essendo $R_n^{(1)} \geq 1$, dovrà essere $\lim\limits_{n=\infty} R_n^{(1)} \geq 1$.

(²) In questo caso, $K(st)$ ammetterà uno solo dei due autovalori $\pm \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$; per stabilirne il segno, ci si potrà servire del criterio esposto alla fine del § 3.

dove

$$H_1^{(2)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n+1}^{(2)}(st)}{\Gamma_2^n};$$

e si ripeta per la $F^{(3)}(st)$ il ragionamento fatto per la $F^{(2)}(st)$. Arriveremo così a trovare per $|\lambda_3|$ la seguente espressione:

$$|\lambda_3| = \frac{1}{|\sqrt{\Gamma_3}|} = \frac{1}{|\sqrt{\Gamma_2}|}\left|\lim_{n=\infty} \frac{\frac{U'_{4n}}{\Gamma_2^{2n}} - U'}{\frac{U'_{4n+2}}{\Gamma_2^{2n+1}} - U'}\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\sqrt{\Gamma_2}|}\left|\lim_{n=\infty} R_n^{(2)}\right|^{\frac{1}{2}},$$

dove potremo ripetere per limite di $R_n^{(2)}$ le stesse considerazioni fatte più sopra per $R_n^{(1)}$ e continuare, nel caso, la ricerca di nuovi autovalori considerando la funzione

$$F^{(4)}(st) = F^{(3)}(st) - H_1^{(3)}(st);$$

e così via indefinitamente, sino a ricerca esaurita. Si arriverà così ad ottenere tutti gli autovalori di $K(st)$.

7. Vediamo ora come si possano determinare tutte le autofunzioni del del nucleo $K(st)$. Evidentemenle basterà limitarsi a mostrare come si possano trovare quelle corrispondenti agli autovalori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, perchè, nello stesso modo, si potranno trovare quelle di $F^{(2)}(st)$, $F^{(3)}(st)$, ... relative agli autovalori $\pm \frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\Gamma_3}}, \ldots$; le quali, come già sappiamo, sono le autofunzioni di $K(st)$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$

Osserviamo, anzitutto, che, se $\chi(s)$ è una funzione qualunque finita ed integrabile, le autofunzioni di $K(st)$, relative all'autovalore $+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, saranno *tutte* rappresentate dall'espressione

$$\int_a^b H(st)\,\chi(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_a^b H_1(st)\,\chi(t)\,dt. \tag{8}$$

Invero si consideri l'equazione integrale di 2ª specie

$$\chi(r) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_a^b K(rt)\,\chi(t)\,dt = \varphi(r),$$

dove $\varphi(r)$ è un'autofunzione di $K(st)$ relativa all'autovalore $+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

Essendo $K(rt)$ una funzione simmetrica, l'equazione precedente ammetterà [1] almeno una soluzione $\chi_1(t)$; moltiplicandone allora ambo i membri per $H(sr)\,dr$, ed integrando, si otterrà [2]

$$\int_a^b H(sr)\,\chi_1(r)\,dr + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_a^b H_1(sr)\,\chi_1(r)\,dr = \varphi(s)\,,$$

il che prova quanto si voleva.

Potremo allora scegliere p_1 (ved. § 3) funzioni $\chi_1(s)\,,\,\chi_2(s)\,,\ldots,\,\chi_{p_1}(s)$ tali che, per esse, la (8) rappresenti le p_1 autofunzioni linearmente indipendenti cercate.

In modo affatto analogo si dimostrerebbe che tutte le autofunzioni di $K(st)$, corrispondenti all'autovalore $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, sono rappresentate dall'espressione

$$\int_a^b H(st)\,\chi(t)\,dt - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_a^b H_1(st)\,\chi(t)\,dt\,, \tag{9}$$

e che le p_2 autofunzioni linearmente indipendenti, relative all'autovalore $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, si potranno avere mediante la scelta opportuna di p_2 funzioni $\chi(s)$.

Ripetendo il ragionamento precedente per le funzioni $F^{(2)}(st)\,,\,F^{(3)}(st)\,,\ldots$ si arriverà a trovare le autofunzioni linearmente indipendenti di $K(st)$ relative agli autovalori $\lambda_2\,,\,\lambda_3\,,\ldots$

Osservazione — Se per funzione $\chi(t)$ assumiamo la $H(t\,,r')$, dove r' indica un valore qualunque di r, entro il suo campo di variabilità, le (8) e (9) diventano rispettivamente

$$H(sr') + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,H_1(sr') \tag{8'}$$

$$H(sr') - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,H_1(sr')\,: \tag{9'}$$

e può darsi che sia possibile di trovare p_1 e p_2 valori r_i di r tali che, per essi, le (8') e (9') rappresentino rispettivamente le p_1 e p_2 autofunzioni linearmente indipendenti cercate. Perchè ciò accada, è sufficiente che, per

[1] Schmidt, loc. cit., § 10. La soluzione sarà unica se $K(st)$ non ammette $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ come autovalore; in caso contrario, ve ne saranno infinite, essendo le autofunzioni di $K(st)$, relative a $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, ortogonali alla $\varphi(r)$.

[2] È facile il vedere che $\int_b^a H(sr)\,\varphi(r)\,dr = \varphi(r)$; basta ragionare come al § 2.

tali valori r_i, il wronskiano delle funzioni

$$H(sr_i) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} H_1(sr_i) \qquad (i = 1, 2, .., p_1)$$

e quello delle

$$H(sr_i) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} H_1(sr_i) \qquad (i = 1, 2, ..., p_2)$$

siano diversi da zero.

Nel caso, poi, che $K(st)$ ammetta uno solo dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, come autovalore, una delle due funzioni (8) e (9) dovrà esser nulla, qualunque sia la $\chi(t)$; e quindi tale anche una delle (8′) e (9′), per ogni valore di r; dovrà cioè sussistere una delle due seguenti uguaglianze:

$$H(st) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} H_1(st) = 0,$$

la quale ci fornirà un secondo criterio (ved. § 3) per riconoscere quale dei due valori $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ la $K(st)$ ammetta come autovalore.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici. I. L'influenza della temperatura* (1). Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi (2).

Nel 1897 (3) ho dimostrato come la scomposizione del lattosio e della caseina per opera di uno stesso batterio stia in rapporto colle condizioni di temperatura, nel senso che la peptonificazione della caseina si compie preferibilmente a bassa temperatura (mentre la scomposizione del lattosio si compie preferibilmente ad alta temperatura): la medesima osservazione ho ripetuto in successivi lavori (4) descrivendo varî tipi di batterî acido-proteditici che isolai dalle mammelle vaccine e dal formaggio; in un più recente studio (5) sulla differenziazione dei fermenti lattici ho fatto risaltare

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1915.

(3) Gorini C., Boll. Uff. del Minist. Agricoltura, Roma 1897; *Annales de Micrographie*, Paris 1897, IX, pag. 433.

(4) Gorini C., Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1907, XL, pag. 47; Rend. R. Acc. Lincei, 1910, pag. 150 e 1911, pag. 284.

(5) Gorini C., Rend. R. Acc. Lincei, 1912, pag. 790.