ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — *Sulle superficie di 6° ordine contenenti infinite coniche.* Nota III di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

4. — F^6 con un fascio di coniche di genere 1.

Il genere π della sezione piana generica può essere 5, 4, 3.

$\pi = 5$. — Le coniche stanno a coppie nei piani per una retta r, doppia per F, che ha inoltre una C^4 doppia di 1ª specie [2].

Oppure r è una retta doppia tacnodale, ed esiste poi una C^3 piana doppia incidente ad r; l'equazione di F è allora:

$$\varphi_4(x_0\,.\,x_1)\,A^2 + \varphi_2(x_0\,,x_1)\,A(x_0P + x_1Q) + (x_0P + x_1Q)^2 = 0\,,$$

dove A è una forma di 1° grado, e P, Q di 2°.

$\pi = 4$. — 1°) Le coniche stanno a terne nei piani di un fascio, il cui asse contiene due punti tripli A, B, distinti o no, comuni a tutte le coniche; si ha poi una C^6 doppia di genere 4 (intersezione d'una quadrica Q con un cono cubico ellittico Γ). Ponendo:

$$Q \equiv x_3^2 + x_3\,\psi_1(x_0\,,x_1\,,x_2) + \psi_2(x_0\,.\,x_1\,,x_2)\,;$$
$$\Gamma \equiv x_3^3 + x_3^2\,\varphi_1(x_0\,,x_1) + x_3\,\varphi_2(x_0\,.\,x_1) + \varphi_3(x_0\,,x_1)\,,$$

l'equazione della F^6 è:

$$Q^3 - (3x_3^2 + 2x_3\,\varphi_1 + \varphi_2)\,Q^2 + (3x_3 + \varphi_1)\,Q\Gamma - \Gamma^2 = 0\,.$$

La C^6 doppia può ridursi a 3 coniche doppie passanti per A, B (il cono Γ si spezza in 3 piani per AB); si ha così la F^6:

$$x_0^2x_1^2(x_0 - x_1)^2 + x_0\,x_1(x_0 - x_1)\,Q\,\varphi_1(x_0\,,x_1) + Q^2\,\varphi_2(x_0\,,x_1) + Q^3 = 0\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1915; sèguito di quella pubblicata a pag. 329 di questo stesso volume.

Durante la stampa di queste Note mi pervenne un lavoro del Marletta sullo stesso argomento [*Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche*, questi Rendiconti, vol. presente, pag. 109]; delle quattro F^6 considerate dal Marletta, la 2ª non è qui riportata (vedi n. 4, caso $\pi = 3$), la 4ª coincide con quella descritta al n. 4 ($\pi = 3$, 1°), la 1ª e la 3ª rientrano in quelle del n. 5 ($\pi = 1$).

[2] Noether, *Ueber eine Fläche 6ter Ordnung vom Flächengeschlecht* − 1, Math. Ann., 21 (1883), pp. 399-410.

Infine, se il cono Γ si riduce ad un piano da contar 3 volte, si ha una F^6 con conica tripla e due punti tripli:

$$x_3^3\varphi_3(x_0, x_1) + x_3^2 Q\varphi_2(x_0, x_1) + x_3 Q^2\varphi_1(x_0, x_1) + Q^3 = 0.$$

Queste tre superficie (che dànno luogo tutte a molti casi speciali, dipendenti dal coincidere dei punti A, B e dallo spezzarsi delle linee multiple) son proiezioni della F^6 di S_4 intersezione di una V_3^2 con una V_3^3 cono cubico ellittico di 2ª specie (luogo di piani), F^6 rappresentabile sull'ordinario cono cubico ellittico col sistema di C^6 segato da tutte le quadriche passanti per una conica.

2°) Le coniche stanno a coppie nei piani per una retta r. Allora F può esser proiezione della stessa F^6 di S_4 sopra descritta (da un punto del cono V_3^3), nel qual caso r è retta doppia tacnodale a piano tangente fisso σ, contenente due punti quadrupli A, B (comuni a tutte le coniche), ed esiste poi una C^4 doppia di 1ª specie bitangente a σ in A, B; tale C^4 può anche spezzarsi, ad es. in due coniche doppie passanti per i punti quadrupli.

Se invece F è normale in S_3, la sua linea doppia comprende, oltre r, una retta doppia tacnodale s, incidente ad r, con rs come piano tangente fisso, e una C^3 sghemba avente s come corda e tangente al piano rs:

$$(x_0\alpha + x_3^2)^2\varphi_2(x_0, x_1) +$$
$$+ x_0(x_0\alpha + x_3^2)(x_0\alpha' + x_3\beta')\varphi_1(x_0, x_1) + x_0(x_0\alpha' + x_3\beta')^2\psi_1(x_0, x_1) = 0$$

(con α, α', β' forme lineari); oppure una retta doppia oscnodale s, incidente ad r, con rs come piano tangente fisso, ed una conica incidente ad s (che può anche spezzarsi in due rette uscenti da un punto di s): l'equazione si ha dalla precedente (nel caso più generale) ponendo $\beta' \equiv x_3$; oppure una retta tripla s incidente ad r e due rette doppie incidenti ad s:

$$x_3^2(x_3 + hx_0)^2\varphi_2(x_0, x_1) +$$
$$+ x_3(x_3 + hx_0)(x_3\alpha + x_0x_2)\psi_2(x_0, x_1) + x_0(x_3\alpha + x_0x_2)^2\varphi_1(x_0, x_1) = 0.$$

3°) Le coniche stanno una per una nei piani tangenti di un cono ellittico di 3ª classe. F ha ora una C^6 doppia di genere 1 contenente un punto triplo (per la C^6 e per F), ed ha un punto triplo ulteriore (vertice del cono, punto base del fascio di coniche); essa si rappresenta sul cono cubico ellittico col sistema lineare di C^6, segato dalle quadriche passanti per 6 punti generici del cono; la si costruisce trasformando il cono col sistema omaloidico di F^3 passanti per la C^3 sghemba determinata da quei

6 punti e per la C^3 piana, sezione del cono, determinata dalle 3 intersezioni ulteriori della C^3 sghemba col cono stesso [1].

La C^6 doppia può ridursi a una retta tripla con 3 rette doppie ad essa incidenti; allora, dei 6 punti base del sistema lineare rappresentativo, ve ne sono 3 allineati, e la F^6 si ha trasformando il cono col sistema omaloidico di quadriche contenenti la retta di quei tre punti e gli altri tre.

La C^6 doppia può anche ridursi a tre coniche doppie passanti per due punti (e non situate su una quadrica), uno dei quali può coincidere col vertice del cono inviluppato dai piani delle coniche; l'equazione è:

$$
\begin{gathered}
x_0^2(x_0 - hx_1)^2 (x_0 - kx_1)^2 + \\
+ x_0(x_0 - hx_1)(x_0 - kx_1)[a\{x_1 \mathrm{P} - x_2(x_0 - hx_1)(x_0 - kx_1)\} - bx_0 \mathrm{P}] + \\
+ \varphi_2[x_1 \mathrm{P} - x_2(x_0 - hx_1)(x_0 - kx_1) \,. - x_0 \mathrm{P}] - \\
- \mathrm{P}[\mathrm{P} + hx_2(x_0 - kx_1)][\mathrm{P} + kx_2(x_0 - hx_1)] = 0\,.
\end{gathered}
$$

$\pi = 3$. — Escluse le superficie (di S_3 ed ivi normali) determinate dallo Scorza [2], che contengono tutte un fascio ellittico di coniche (e perciò rientrano fra le nostre), si hanno qui delle F^6 normali in S_4. Esistono in S_4 due tipi diversi di F^6 con un fascio ellittico di coniche e sezioni iperpiane di genere 3: la prima è l'intersezione (completa) d'una V_3^3 cono cubico ellittico di 2ª specie, e d'una V_3^2 cono quadrico, aventi in comune una retta generatrice e lungo questa lo stesso S_3 tangente; la seconda è l'intersezione (residua) d'una V_3^4 cono quartico ellittico di 1ª specie luogo di piani, e di una V_3^2 cono quadrico di 1ª specie contenente due piani generatori del primo cono situati in uno stesso S_3.

1°) La più generale proiezione in S_3 della prima di queste F^6 ha due punti tripli consecutivi $A \equiv B$, situati su tutte le sue coniche, le quali stanno a terne nei piani per AB. La linea doppia si compone d'una retta s uscente da A, e d'una C^6 sghemba con due punti doppî su s; ma può anche darsi che s sia una retta doppia oscnodale, nel qual caso esistono ancora due coniche doppie passanti per A e B; infine la C^6 doppia può degenerare in due rette triple (distinte o no) uscenti da un punto di s (e che possono coincidere con s, una o entrambe).

2°) Se il centro di proiezione sta sulla V_3^3, si ha in S_3 una F^6 con una retta doppia tacnodale r a piano tangente fisso (le cui coniche stanno a coppie nei piani per r), una retta doppia s incidente ad r, e una C^4 doppia di 1ª specie con un punto doppio su s e tangente ad r nel punto rs.

(1) Noether, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen*, Math. Ann., 3 (1871), pp. 547-580, § 7; Cremona, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen*, ibid., 4 (1871), pp. 213-230, 8. Beispiel, applicano questa trasformazione ad una F^3 generica passante per la C^3 piana.

(2) Scorza, *Le superficie a curve sezioni di genere tre*, Ann. di Matem., (3) 16 (1909), pp. 255-326.

3°) La più generale proiezione in S_3 della seconda F^6 di S_4 ha le sue coniche situate una per una nei piani tangenti d'un cono di 4ª classe ellittico, e possiede una retta doppia contenente due punti tripli (in uno dei piani bitangenti del cono), una C^6 doppia di genere 2 con due punti doppî nei punti tripli anzidetti, ed un tacnodo nel vertice del cono (punto base del fascio di coniche), l'altro piano bitangente del cono essendo ivi tangente alla F^6.

La C^6 doppia può ridursi a due rette triple uscenti da un punto della retta doppia.

4°) Prendendo il centro di proiezione sulla V_3^4 (ma non su uno dei suoi piani doppî), la F^6 di S_3 ha due rette doppie incidenti r, s ed una C^5 doppia avente un punto doppio su r, passante per il punto rs e appoggiata ad s in altri due punti; i piani delle coniche inviluppano un cono di terza classe ellittico.

5°) Prendendo il centro di proiezione su uno dei piani doppî della V_3^4, si hanno in S_3 due F^6 le cui coniche stanno a coppie nei piani per una retta doppia r. Una ha come linea doppia una C^4 con punto doppio insieme con le sue tangenti nodali e una retta (la r) uscente dal punto doppio; l'altra una C^3 sghemba con un triangolo inscritto e con la tangente (r) in un vertice del triangolo.

5. — F^6 razionali luoghi di coniche.

Il genere π della sezione piana generica può variare da 4 ad 1.

Per $\pi = 4$ si hanno le F^6 con retta quadrupla, senza altre linee multiple, normali in S_3.

Per $\pi = 3$ si hanno delle F^6 normali in S_4, rappresentate sul piano da sistemi lineari di C^5 con un punto base triplo e 10 semplici. Le F^6 di S_4, così ottenute, sono di due tipi: uno ottenuto segando una V_3^2 cono quadrico di 1ª specie con una V_3^4 contenente due piani del cono d'uno stesso sistema; l'altro ottenuto segando una V_3^2 cono quadrico di 2ª specie con una V_3^3 passante per l'asse del cono.

Come proiezioni delle precedenti in S_3 si hanno: una F^6 con C^7 doppia di genere 5, le cui coniche stanno una per una nei piani tangenti di un cono quadrico [1]; una F^6 con una C^6 doppia ed una retta doppia corda della C^6, le cui coniche stanno a coppie nei piani per la retta doppia; una F^6 con una retta quadrupla ed una doppia, fra loro incidenti, od anche consecutive (ma complanari).

[1] Caporali, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*, Mem. di geom., pp. 171-203, n. 42; Reye, *Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren*, Math. Ann., 48 (1897), pp. 113-141, § 5; Lo Piano, *Intorno ad una superficie dell'ordine* $n+2$ *dotata di una curva doppia dell'ordine* $\frac{n(n-1)}{2}+1$, Rend. Napoli, (3) 6 (1900), pp. 130-135.

Per $\pi = 2$ si hanno le proiezioni della F^6 di S_5 rappresentata sul piano dal sistema lineare delle C^4 con un punto base doppio e 6 semplici. Essa è l'intersezione d'una V_4^2 con una V_3^3 razionale luogo di piani (che può essere la V_3^3 razionale generale luogo di piani (¹), oppure un cono di 1ª o di 2ª specie). Sulle proiezioni in S_3 di questa F^6 le coniche possono stare una per una nei piani osculatori d'una C^3 sghemba (o nei piani tangenti d'un cono razionale di 3ª classe) oppure a terne nei piani d'un fascio, ed allora F ha una C^8 doppia di genere 3 con due punti tripli (²), oppure una C^5 doppia ed una sua quadrisecante come retta tripla, oppure una conica tripla ed una doppia con due punti comuni.

Se i piani delle coniche inviluppano un cono quadrico, F ha una retta doppia ed una C^7 doppia avente su quella retta due punti doppî ed uno semplice.

Se le coniche stanno a coppie nei piani d'un fascio, la linea doppia di F si compone dell'asse del fascio, d'una retta ad esso incidente e d'una C^6 con due punti doppî sulla seconda retta e due semplici sulla prima (le due rette doppie possono essere consecutive).

Infine F può avere una retta quadrupla e due doppie (distinte o no) a distanza finita o infinitesima dalla retta quadrupla.

Per $\pi = 1$ si hanno F^6 di S_3 proiezioni della F^6 di S_6 rappresentata sul piano dal sistema lineare delle C^3 passanti per tre punti. Tra esse rientrano tutte le F^6 con più fasci di coniche: tre al massimo. La più generale ha una C^9 doppia con 4 punti tripli (³). Rileviamo poi una F^6 con retta quadrupla e tre rette doppie ad essa incidenti; la F^6 (⁴) luogo del punto comune a tre piani omologhi in una corrispondenza trilineare posta fra i piani osculatori d'una C^3 sghemba. Altre proiezioni son note (⁵) (*).

(¹) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*. Atti Acc. Torino, 21 (1885-1886), pp. 95-115, nota a pag. 102.

(²) Caporali, loc. cit.; Reye, loc. cit., n. 41.

(³) Caporali, loc. cit.; Reye, loc. cit., § 3.

(⁴) Marletta, loc. cit. nella Nota I, n. 25.

(⁵) Bordiga, *Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dallo spazio a 6 dimensioni*, Atti Istituto Veneto, (6) 4 (1885-86), pp. 1461-1501; Del Pezzo, *Intorno ad una superficie del 6° ordine con nove rette doppie*, Rendic. Napoli, (3) 3 (1897), pp. 196 203; Bonicelli, *Sopra una trasformazione birazionale dello spazio di 3° grado e una classe di superficie razionali del 6° ordine*, Giorn. di Matem., 40 (1902), pp. 184-191.

(*) Nel fasc. 7° contenente la Nota II sono sfuggiti i seguenti errori tipografici:

Pag.	linea	*errata*	*corrige*
329	14	pag. di	pag. 307 di
330	28	qnadrupli	quadrupli
331	2	$x_1 \varphi_4(x_0 , x_1) + \cdots$	$x_1^2 \varphi_4(x_0 , x_1) + \cdots$
"	3	$x_3^2 + x_1 , x_2$ (2 volte)	$x_3^2 + x_1 x_2$
332	3	$\varphi_2(x_0 , x_1))$	$\varphi_2(x_0 , x_1)$
"	4	$\psi_2(x^0 , x_1)$	$\psi_2(x_0 , x_1)$
"	12	$A = B$	$A \equiv B$
"	17	$(x_3^2 + x_0 x_2)\left(c_0 x_0^2 + c_1 x_0 x_1 + \frac{b_2^2}{4a_2}\right)$	$(x_3^2 + x_0 x_2)^2\left(c_0 x_0^2 + c_1 x_0 x_1 + \frac{b_2^2}{4a_2} x_1^2\right)$
"	19	dne	due