ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Matematica. — ***Sugli integrali abeliani riducibili.*** **Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo (*).**

Questo lavoro si riattacca direttamente a quello che, col medesimo titolo, apparve già in due Note successive nei fascicoli di questi Rendiconti del marzo di quest'anno (1); e mira a precisare sempre meglio le proprietà delle varietà algebriche dotate di sistemi regolari di integrali riducibili (2).

Così, ad es., abbiamo dimostrato che due sistemi regolari di integrali riducibili di una varietà algebrica, associati rispetto a un suo sistema nullo principale, sono complementari; e che, viceversa, dati sopra una varietà algebrica due sistemi regolari complementari, esistono infiniti sistemi nulli della varietà, rispetto a cui essi sono associati (3). Ma fra questi sistemi nulli ve ne son certo di quelli che siano principali?

Così pure abbiamo dimostrato che condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica ammetta un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $q-1$, è che essa ammetta un sistema nullo, almeno, singolare di specie $2q$. In tal modo, per ogni sistema nullo singolare di specie $2q$ della varietà viene ad aversi *un* corrispondente sistema regolare di dimensione $q-1$; ma uno stesso sistema regolare di dimensione $q-1$ può provenire da più sistemi nulli singolari di specie $2q$ della varietà, linearmente indipendenti (4). È possibile precisare in qualche maniera il numero di questi sistemi nulli, dati i valori di opportuni *caratteri* della varietà e del sistema?

Si sa, infine, che un sistema regolare appartenente a una data varietà algebrica ha sempre su questa un sistema complementare, ed è facile vedere che o questo sistema è unico o varia in una totalità infinita (discontinua) (5). È possibile assegnare un criterio per stabilire *a priori* quale sia, a volta a volta, il caso che si presenta?

Son queste le domande a cui rispondiamo nelle pagine seguenti.

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1915.

(1) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili.* Note I e II [Rendic. della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 412-418 e pp. 645-654].

(2) Siccome non vi è luogo ad equivoci, in questo lavoro diremo sempre « integrale », senz'altro, al posto di « integrale semplice di 1ª specie ».

(3) Loc. cit. (1), Nota II, nn. 15 e 17.

(4) Loc. cit. (1), Nota II, n. 19.

(5) La cosa risulta dal seguito di questo lavoro, ma può dedursi agevolmente da quanto è osservato dal sig. Severi alla fine del n. 4 della sua Nota: *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1° sem. 1914, pp. 581-587 e pp. 641-651].

La nozione che compie in esse un ufficio essenziale è quella di *indice di singolarità*, adoperata qui non solo per le varietà algebriche, ma anche per i sistemi regolari di integrali riducibili; e i risultati a cui ora perveniamo, congiunti a quelli raccolti in due altre Note recenti ([6]), provano, se non erriamo, con la loro semplicità precisa e netta, che questa nozione è, per la teoria degli integrali riducibili, di importanza fondamentale.

Anche quella che ne consegue, di *coefficiente di immersione* di un sistema regolare sopra una varietà algebrica a cui appartenga, che qui ci limitiamo semplicemente a definire, sembra esser chiamata a rendere utili servigi in questi studî.

Ma su ciò ci riserbiamo di ritornare in una prossima occasione.

1. Allorchè una varietà algebrica contiene un sistema regolare di integrali riducibili, questo può sempre pensarsi come il sistema di tutti gli integrali di una conveniente varietà algebrica: cioè esiste una varietà algebrica i cui integrali hanno gli stessi periodi degli integrali del sistema. Ma allora le nozioni di relazioni di Riemann (o sistemi nulli), di relazioni di Riemann (o sistemi nulli) principali e di indice di singolarità ([7]) potranno estendersi anche ai sistemi regolari di integrali riducibili, chiamando, per es., indice di singolarità di un tal sistema quello di una varietà algebrica a cui *spettino* i suoi integrali.

Questa estensione, del resto, apparisce ben naturale se si pensa che codeste nozioni hanno un'origine puramente aritmetica e possono esser stabilite in tutti quei casi in cui si abbia a che fare con una matrice, a p righe e $2p$ colonne, i cui elementi soddisfacciano a una certa condizione che poi, appunto, si esprime col dire che essi soddisfanno a una (almeno) relazione principale di Riemann.

Si tratta, in fondo, di nient'altro che di proprietà di una tal matrice invarianti di fronte a un doppio ordine di trasformazioni; cioè di proprietà che restano inalterate tanto se alle p righe della matrice considerata si sostituiscono p loro combinazioni lineari omogenee indipendenti qualunque, quanto se agli elementi delle sue singole righe, concepiti come coordinate omogenee di p punti di un S_{2p-1}, si applica una *stessa* trasformazione omografica, rappresentata da una sostituzione lineare omogenea a coefficienti *razionali* e a modulo non nullo.

Veramente, per quanto riguarda l'invarianza di fronte al secondo ordine di operazioni, dato lo scopo a cui allora si mirava, noi supponevamo, nei lavori già citati, che si trattasse di sostituzioni a coefficienti intieri e uni-

([6]) Scorza, *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*. Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIV, 2° sem. 1915, pp. 279-284 e pp. 333-338].

([7]) Loc. cit. [1]), Nota II, nn. 8, 9 e 10; e loc. cit. [6]), introduz. della Nota I.

modulari; ma si vede subito che l'invarianza in discorso sussiste anche nel senso più generale ora chiarito.

Questa osservazione permette di affermare che per il calcolo dell'indice di singolarità di una varietà algebrica di irregolarità superficiale p è inutile partire dalla tabella dei periodi di un sistema di p suoi integrali indipendenti rispetto a un sistema primitivo di $2p$ cicli lineari della sua riemanniana: basta partire dalla tabella relativa a un qualunque sistema di $2p$ cicli lineari *indipendenti*.

Di qua si raccoglie, in particolare, che:

Se fra due varietà algebriche della stessa irregolarità superficiale si può stabilire una corrispondenza (algebrica) $(1, n)$, *esse hanno pure lo stesso indice di singolarità.*

2. Per una varietà algebrica di irregolarità superficiale 1 (o per un integrale ellittico) non v'è luogo a parlare di relazioni di Riemann e, quindi, di indice di singolarità: volendo, può dirsi che di quelle ce n'è sempre una, ed una sola, principale, rispondente alla forma bilineare alternata elementare $x_1 y_2 - x_2 y_1$. e che questo è, per conseguenza, sempre *zero*. È quanto faremo nel seguito per non aver da distinguere il caso dell'integrale ellittico dal caso di un sistema regolare con dimensione > 0.

3. Ciò posto, consideriamo una varietà algebrica V_p di irregolarità superficiale $p > 1$, e supponiamo che A e A′ siano due suoi sistemi regolari complementari di integrali riducibili, delle dimensioni rispettive $q-1$ e $q'-1 = p-q-1$ $(0 < q < p)$.

Introdotta per gli integrali di V_p la solita rappresentazione geometrica mediante due S_{p-1}, τ e $\bar{\tau}$, imaginarî coniugati di specie p di un S_{2p-1}, Σ, per modo da poter parlare di sistemi nulli di V_p e degli *assi* A_1 e A'_1 di A e A′ ([8]), dimostriamo in primo luogo che:

Esistono sempre infiniti sistemi nulli principali di V_p, *rispetto a cui* A *e* A′ *sono associati: cioè, rispetto a cui gli assi* A_1 *e* A'_1 *di* A *e* A′ *sono l'uno lo spazio polare dell'altro.*

Siano $u_1, u_2, \ldots, u_q$ q integrali indipendenti del sistema A, e $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$ q' integrali indipendenti del sistema A′: gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ saranno p integrali indipendenti di V_p, e, se

$$\begin{Vmatrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p,2p} \end{Vmatrix}$$

è la tabella dei loro periodi, le coordinate di τ in Σ sono semplicemente i minori d'ordine p estratti da questa matrice.

([8]) Loc. cit. [1], Nota I, nn. 1, 2 e 6.

Indicando i periodi ridotti dell'integrale u_j con $\Omega_{j,l}$ $(l = 1, 2, \dots, 2q)$ per $j = 1, 2, \dots, q$, e con $\Omega'_{j-q,m}$ $(m = 1, 2, \dots, 2q')$ per $j = q + 1, q + 2, \dots, p$, avremo, per $j = 1, 2, \dots, q$,

$$\omega_{j,r} = \sum_{l=1}^{l=2q} h_{r,l}\, \Omega_{j,l} \qquad (r = 1, 2, \dots, 2p),$$

e, per $j = q + 1, q + 2, \dots, p$,

$$\omega_{j,r} = \sum_{m=1}^{m=2q'} h'_{r,m}\, \Omega'_{j-q,m} \qquad (r = 1, 2, \dots, 2p),$$

dove le h e le h' stanno ad indicare degli opportuni numeri interi.

L'asse A_1 di A sarà allora l'S_{2q-1} razionale di Σ avente per coordinate i minori d'ordine $2q$ della matrice

$$\left\| \begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{2p,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1,2q} & h_{2,2q} & \dots & h_{2p,2q} \end{matrix} \right\|,$$

e l'asse A_1 di A'_1 sarà l'$S_{2q'-1}$ razionale, indipendente da A_1, avente per coordinate i minori d'ordine $2q'$ della matrice

$$\left\| \begin{matrix} h'_{1,1} & h'_{2,1} & \dots & h'_{2p,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h'_{1,2q'} & h'_{2,2q'} & \dots & h'_{2p,2q'} \end{matrix} \right\|.$$

Noi dobbiamo dimostrare che esiste un sistema nullo principale di V_p, rispetto a cui i sistemi A e A' sono associati: cioè, in sostanza, che esiste un sistema nullo *razionale* di Σ — avente in τ e $\bar{\tau}$ due spazî autopolari e soddisfacente inoltre a una condizione *geometrica* [9] rispetto alla totalità dei sistemi nulli singolari aventi in τ e $\bar{\tau}$ due spazî autopolari — rispetto a cui gli spazî A_1 e A'_1 sono mutuamente reciproci; quindi ci è lecito eseguire in Σ una qualsiasi trasformazione *razionale* di coordinate [10].

[9] Quale sia questa proprietà, di natura proiettivo-topologica, risulta dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane. Cfr. Scorza, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* (in corso di stampa nelle Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL).

[10] La ragione intima della possibilità di un tal procedimento sta in ciò che è detto più sopra, al n. 1.

Ebbene, eseguiamo nello spazio Σ la trasformazione di coordinate, che esprime le antiche coordinate x per le nuove X mediante le formule:

$$x_r = \sum_{l=1}^{l=2q} h_{r,l}\, X_l + \sum_{m=1}^{m=2q'} h'_{r,m}\, X_{2q+m} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Nel nuovo sistema di coordinate, τ è lo spazio che ha per coordinate i minori d'ordine p della matrice

$$\left\|\begin{matrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & . & \Omega_{1,2q} & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \Omega_{q,1} & \Omega_{q,2} & . & \Omega_{q,2q} & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & \Omega'_{1,1} & \Omega'_{1,2} & . & \Omega'_{1,2q'} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & \Omega'_{q',1} & \Omega'_{q',2} & . & \Omega'_{q',2q'} \end{matrix}\right\|$$

Sia adesso nello spazio fondamentale rappresentato dalle equazioni

$$X_{2q+1} = X_{2q+2} = \cdots = X_{2p} = 0$$

(che è l'asse A_1 di A e che ha per il sistema A, nelle nuove coordinate X, lo stesso significato che Σ ha, nelle antiche coordinate x, per V_p),

$$\text{(1)} \qquad \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, X_r\, X_s = 0 \qquad (c_{r,s} + c_{s,r} = 0)$$

l'equazione di un sistema nullo principale di A; e allo stesso modo sia, nello spazio fondamentale rappresentato dalle equazioni

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_{2q} = 0,$$

che è l'asse di A',

$$\text{(2)} \qquad \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, X_{2q+r}\, X_{2q+s} = 0 \qquad (c'_{r,s} + c'_{s,r} = 0)$$

l'equazione di un sistema nullo principale di A'. Due tali sistemi nulli esistono certamente: e il dire che essi sono principali equivale, a dire che, indicati con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ e $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q'}$ due gruppi di indeterminate, e posto

$$\xi_r + i\eta_r = \lambda_1 \Omega_{1,r} + \cdots + \lambda_q \Omega_{q,r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2q)$$
$$\xi'_r + i\eta'_r = \mu_1 \Omega'_{1,r} + \cdots + \mu_{q'} \Omega'_{q',r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2q')$$

con $i = \sqrt{-1}$ e le ξ, η, ξ', η' reali, ciascuna delle forme

$$\sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s\,, \qquad \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, \xi'_r\, \eta'_s$$

si mantiene diversa da zero e sempre dello stesso segno — diciamo positiva — qualunque siano, rispettivamente, i valori non tutti nulli delle λ o delle μ [11].

Le equazioni (1) e (2), interpretate come equazioni in $\boldsymbol{\Sigma}$, rappresentano due sistemi nulli aventi per assi, il primo, l'asse A'_1 di A', e il secondo, l'asse A_1 di A; e così l'uno come l'altro hanno poi come spazî autoconiugati $\boldsymbol{\tau}$ e $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ [12].

Segue che, qualunque siano gli interi non nulli ϱ e σ, l'equazione

$$(3) \qquad \varrho \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, X_r\, X_s + \sigma \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, X_{2q+r}\, X_{2q+s} = 0$$

rappresenta un sistema nullo di V_p, rispetto a cui A e A' sono associati.

Perchè esso sia principale, occorre e basta che, per valori adesso non contemporaneamente tutti nulli delle λ e delle μ, si abbia sempre

$$\varrho \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s + \sigma \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, \xi'_r\, \eta'_s > 0\,,$$

o sempre

$$\varrho \sum_{r,s}^{1\cdots 2q} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s + \sigma \sum_{r,s}^{1\cdots 2q'} c'_{r,s}\, \xi'_r\, \eta'_s < 0\,;$$

per il che occorre e basta, evidentemente, che ϱ e σ siano entrambi positivi (>0) o entrambi negativi (<0); dunque la nostra affermazione è dimostrata [13].

4. Per un'osservazione già fatta altrove [14], la costruzione del num. precedente, quando si supponga di sceglier comunque i sistemi nulli (1) e (2)

[11] Loc. cit. [1], Nota II, n. 8.

[12] Si badi che, per es., il sistema nullo di A rappresentato dall'equazione (1) ha, per definizione, due spazî autopolari nelle traccie di A_1 su τ e $\overline{\tau}$, che sono degli S_{q-1}.

[13] Dalla dimostrazione risulta in più la circostanza che, entro il fascio dei sistemi nulli contenente i nostri infiniti sistemi nulli principali, considerato come una forma di 1ª specie (reale), questi ultimi son tutti contenuti in uno stesso *segmento* della forma. È quanto avremmo anche trovato, nel modo più spontaneo, se avessimo utilizzato i teoremi contenuti nella Memoria citata in [9] per dimostrare geometricamente il teorema del testo. Ma abbiamo creduto più comodo, per il lettore, dare una dimostrazione indipendente da quei teoremi, tanto più che essa è assai rapida e semplice.

[14] Loc. cit. [1], Nota II, *Osservazione* del n. 15.

fra i sistemi nulli principali di A e A′, rispettivamente, dà *tutti* i sistemi nulli principali di V_p, rispetto a cui A e A′ sono associati; se invece si suppone che le equazioni (1) e (2) rappresentino, rispettivamente, un *qualsiasi* sistema nullo non singolare di A o di A′, l'equazione (3) (dove adesso ϱ e σ si riguardano come due numeri interi *qualunque*, diversi entrambi da zero), al variare di ϱ e σ e al variare dei sistemi nulli (1) e (2) fra i sistemi nulli non singolari di A e A′, dà tutti i sistemi nulli (non singolari) di V_p, rispetto a cui A e A′ sono associati.

Ma se $k^{(a)}$ e $k^{(a')}$ sono, rispettivamente, gli indici di singolarità di A e A′, esistono ordinatamente, $k^{(a)}+1$ e $k^{(a')}+1$ (e non più) sistemi nulli non singolari di A e A′, linearmente indipendenti: dunque fra i sistemi nulli (non singolari) di V_p, rispetto a cui A e A′ sono associati, è possibile sceglierne $k^{(a)}+k^{(a')}+2$ (e non più) linearmente indipendenti.

Segue che:

I) *Se* A *e* A′ *sono due sistemi regolari complementari di integrali riducibili di* V_p, *con gli indici di singolarità* $k^{(a)}$ *e* $k^{(a')}$, *i sistemi nulli di* V_p, *rispetto a cui essi sono associati, sono tutti e soli quelli non singolari di un sistema lineare avente per dimensione* $k^{(a)}+k^{(a')}+1$;

e poi, se si tien conto dell'indice di singolarità di V_p, che:

II) *Se* A *e* A′ *sono due sistemi regolari complementari di* V_p *e gli indici di singolarità di* A, A′ *e* V_p *sono, ordinatamente,* $k^{(a)}$, $k^{(a')}$ *e* k, *due casi possono presentarsi:*

1°) *o è* $k^{(a)}+k^{(a')}+1=k$, *e allora ciascuno dei due sistemi* A *e* A′ *individua il proprio complementare;*

2°) *o è* $k^{(a)}+k^{(a')}+1<k$, *e allora ciascuno dei due sistemi* A *e* A′ *ammette infiniti sistemi complementari distinti.*

E non basta. Siccome gli assi A_1 e A_1' di A e A′ sono indipendenti, il numero dei sistemi nulli non singolari di A linearmente indipendenti eguaglia il numero dei sistemi nulli singolari di V_p, linearmente indipendenti, che hanno per asse A_1', poichè ognuno di questi induce nell'asse di A *un* sistema nullo non singolare di A, e ogni tal sistema nullo di A è indotto nell'asse di A da *un* sistema nullo di V_p avente per asse A_1'; dunque, ricordando una proposizione già da noi dimostrata ([15]), possiamo dire che:

III) *Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica* V_p *ammetta sistemi regolari di integrali riducibili è che essa ammetta sistemi nulli singolari. Ad ogni tal sistema nullo, eventualmente esistente, risponde uno ed un sol sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del sistema nullo; mentre, per ogni eventuale sistema regolare di integrali riducibili di* V_p, *esistono tanti sistemi nulli di* V_p, *linearmente indipendenti, aventi per asse l'asse del sistema, quant'è*

([15]) Loc. cit. [4])

l'indice di singolarità, aumentato di 1, *di un sistema regolare complementare al dato*;

nella qual proposizione è implicitamente contenuta quest'altra:

IV) *Se la varietà algebrica* V_p *con l'indice di singolarità* k *possiede un sistema regolare di integrali riducibili* A *con l'indice di singolarità* $k^{(a)}$, *l'indice di singolarità di un sistema regolare complementare di* A *è senz'altro determinato, poichè: o tal sistema complementare è unico, e allora il suo indice di singolarità è* $k - k^{(a)} - 1$; *o varia in una totalità infinita (discontinua), e allora il suo indice di singolarità è sempre lo stesso.*

5. In base ai risultati conseguiti, se A e A' sono due sistemi complementari di V_p, e $k^{(a)}$, $k^{(a')}$ e k sono gl'indici di singolarità di A, A' e V_p, il numero

$$\lambda = k - k^{(a)} - k^{(a')} - 1,$$

che in virtù di II) è un intero positivo o nullo, è nettamente determinato da V_p e A (o da V_p e A'); e quindi è un *carattere* di A (o di A') *su* V_p, che possiamo chiamare il *coefficiente di immersione* di A (o di A') *su* V_p, o, semplicemente, quando non vi sia possibilità di equivoci, il *coefficiente di immersione* di A (o di A').

Siccome λ non può esser negativo, è

$$k > k^{(a)} \quad \text{o} \quad k > k^{(a')},$$

e quindi:

L'indice di singolarità di una varietà algebrica è maggiore dell'indice di singolarità di ogni suo eventuale sistema regolare di integrali riducibili.

6. Se un sistema regolare A di V_p ha il coefficiente di immersione nullo, cioè individua il suo complementare, il sistema A lo diciamo *isolato.*

Se V_p ammette solo un numero finito di sistemi regolari riducibili, è chiaro che ognuno di questi sistemi è isolato. Ma in una Nota successiva, come facile corollario di un teorema generale sulla distribuzione dei sistemi regolari di una varietà algebrica contenente sistemi isolati, faremo vedere che, non solo è vera la proposizione inversa, ma, più generalmente, che:

È sempre finito l'insieme dei sistemi regolari isolati appartenenti a una data varietà algebrica.

Questo risultato verrà anzi ottenuto in forma molto più precisa.