

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
*Seduta del 21 novembre 1915.*

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica celeste. — *Sul problema piano dei tre corpi. Caratteristiche cinetiche del sistema regolarizzante; forza viva e quadrica reciproca.* Nota I del Socio T. LEVI-CIVITA (<sup>1</sup>).

In una Nota recente (<sup>2</sup>) ho fatto subire al problema piano dei tre corpi una trasformazione dinamica, mostrando, in base ad essa, la *possibilità* di una regolarizzazione completa (per tutto il corso del moto, anche se eventualmente intervengono urti) mediante scelta opportuna di coordinate lagrangiane.

Mi accingo ora a tradurre in atto l'accennata possibilità. Col permesso dell'Accademia, dedicherò alla questione tre Note: la presente, e due altre che immediatamente seguiranno.

Premesso uno studio sulla struttura cinematica del sistema trasformato e rilevato che esso rientra in una categoria di sistemi olonomi cui si applicano utilmente le equazioni miste canonico-euleriane (<sup>3</sup>), deduco nella prima Nota una forma reciproca della forza viva, che domina tutto lo svolgimento

(<sup>1</sup>) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

(<sup>2</sup>) *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75. Tale Nota richiamerò qui appresso colla citazione abbreviata R).

(<sup>3</sup>) *Forma mista di equazioni del moto, che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici*, ibidem, pp. 235-248. Abbrevierò anche la citazione di quest'ultima Nota, designandola semplicemente con M).

ulteriore. Il calcolo all'uopo necessario è condotto in modo da poter seguire senza sforzo i passaggi successivi, evitando la materiale risoluzione di equazioni lineari, che sarebbe richiesta dalla teoria generale.

Nella seconda Nota si esplicitano le equazioni regolarizzate: dapprima sotto la forma mista, testè ricordata; poi anche sotto forma canonica pura, e ciò con referenza a tre diverse quaderne di coordinate lagrangiane. Ciascuna determina in modo geometricamente espressivo la configurazione dei tre corpi, ed ha una specifica ragion d'essere. La prima quaderna si presenta più ovvia per immediata analogia coi procedimenti classicamente in uso nella dinamica dei solidi; la seconda risponde in modo spontaneo al bisogno di simmetria, la quale simmetria — sia detto per incidenza — non è invece raggiungibile nel caso dei solidi, senza pregiudizio della agilità (si pensi ai parametri di Rodrigues); infine la terza quaderna, che chiamo *asteroidica*, appare indicata allorchè, nell'impostazione astronomica o meccanica del problema, uno dei tre corpi si trova, per qualche motivo, distinto dagli altri due, i quali seguitano a comportarsi in modo simmetrico.

Un caso limite assai importante è offerto dal problema ristretto. Mi è parso perciò non inutile di occuparmene *ex professo* nella terza Nota. Essa si inizia richiamandone la trattazione abituale e sviluppando (sotto veste canonica) una trasformazione in coordinate ellittiche, già sfruttata dal Thiele a scopo pratico (per la valutazione numerica di certe soluzioni periodiche). Riprendendo poi le equazioni regolarizzate del problema piano in coordinate ellittiche, vi si pone (colle debite cautele) una delle masse eguali allo zero, si rileva la scindibilità del sistema differenziale in due e la conseguente riduzione a due gradi di libertà, e si istituiscono infine raffronti di controllo per assodare la coincidenza delle formule, che così si ottengono, con quelle ricavate per via diretta.

La ricerca è, come si vede, quasi interamente formale; ma non va dimenticato che, in simili questioni, i progressi formali sono stati spesso fecondi.

#### 1. — VINCOLI E FUNZIONE LAGRANGIANA DEL PROBLEMA TRASFORMATO.

Ho dimostrato in R) che le equazioni differenziali, da cui dipende il problema piano dei tre corpi, equivalgono (a meno di un cambiamento di variabile indipendente) alle equazioni del moto di un altro sistema olonomo S definito come segue:

*Da parametri determinativi della posizione di S fungono sei quantità*

$$\xi_\nu, \tau_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

*legate dalle due equazioni vincolari*

$$(1) \quad \sum_0^2 \xi_\nu^2 = \sum_0^2 \tau_\nu^2, \quad \sum_0^2 \xi_\nu \tau_\nu = 0.$$

Il significato di tali parametri è riportato all'originario problema piano dei tre corpi mediante le relazioni

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2 \quad (i = \sqrt{-1}; \nu = 0, 1, 2),$$

in cui  $x_\nu, y_\nu$  rappresentano le proiezioni dei lati del triangolo dei tre corpi  $P_0 P_1 P_2$  sopra un sistema di assi di direzione invariabile: in modo preciso,  $x_\nu, y_\nu$  sono le componenti del vettore  $P_{\nu+2} - P_{\nu+1}$ , coll'intesa evidente di riguardare identici gli indici congrui rispetto al modulo 3.

*Forza viva.* Designando con apici le derivazioni rispetto alla variabile indipendente  $\tau$ , si ha, quale espressione della forza viva,

$$(2) \quad T = 2U \sum_\nu m_\nu^* (\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2),$$

dove, posto

$$(3) \quad \rho_\nu^2 = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} = P_{\nu+1} P_{\nu+2},$$

le costanti  $m_\nu^*$  sono definite, in termini delle masse  $m_\nu$  dei tre corpi, dalle posizioni

$$(4) \quad m_\nu^* = \frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{m} \quad (m = m_0 + m_1 + m_2);$$

e

$$(5) \quad U = f \sum_0^2 \frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{\rho_\nu^2} = f m \sum_0^2 \frac{m_\nu^*}{\rho_\nu^2} \quad (f \text{ costante d'attrazione})$$

è la funzione delle forze dell'originario problema.

Per il problema trasformato, di cui ora si tratta, si ha invece quale *Funzione delle forze*

$$\frac{E}{U},$$

E essendo una costante (l'energia totale del problema primitivo); quale

*Energia totale*  $T - \frac{E}{U}$ , lo speciale valore 1; quale

*Funzione lagrangiana*

$$(6) \quad A = T + \frac{E}{U},$$

$T$  ed  $U$  avendo le espressioni (2) e (5).

## 2. — CINEMATICA DEL SISTEMA S.

Nella prima delle equazioni vincolari (1),

$$\sum_0^2 \nu \xi_\nu^2 = \sum_0^2 \nu \eta_\nu^2,$$

il valore comune dei primi membri va ritenuto diverso da zero. Infatti esso potrebbe annullarsi solo a patto che si annullassero tutte le  $\xi$  e tutte le  $\eta$ : il che è quanto dire, riferendosi agli originari tre corpi, nel caso della loro coincidenza in un medesimo punto (collisione generale). Ora questa è senza altro esclusa, per tutto il corso del moto, tosto che si suppone diversa da zero la costante delle aree (teorema di Sundman) <sup>(1)</sup>. Sotto tale ipotesi, si può anzi affermare qualche cosa di più: cioè che il limite inferiore del trinomio

$$\sum_0^2 m_v^* \rho_v^4$$

(momento di inerzia polare dei tre corpi rispetto al loro baricentro) <sup>(2)</sup> è  $> 0$ . Ne consegue, in base alle (3), che è pure  $> 0$  il limite inferiore del valore comune  $q^2$  dei due trinomiali

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2.$$

Risguarderemo  $q$  come una prima coordinata lagrangiana del sistema S. Il significato geometrico risulta subito dalla definizione. Si ha infatti, in virtù delle (3),

$$2q^2 = \sum_0^2 \rho_v^2,$$

donde apparisce che  $q^2$  è il semiperimetro del triangolo dei tre corpi.

Posto

$$(7) \quad \xi_v = q\alpha_v, \quad \eta_v = q\beta_v, \quad (v = 0, 1, 2),$$

la definizione di  $q$  e le (1) danno

$$(8) \quad \sum_0^2 \alpha_v^2 = 1, \quad \sum_0^2 \beta_v^2 = 1, \quad \sum_0^2 \alpha_v \beta_v = 0,$$

le quali consentono di interpretare  $\alpha_v$  e  $\beta_v$  quali coseni direttori, rispetto ad un generico sistema cartesiano ortogonale  $Ox_0 x_1 x_2$ , di due semirette perpendicolari: indicheremo con  $\alpha, \beta$  i rispettivi vettori unitari (le cui componenti sono appunto tali coseni  $\alpha_v, \beta_v$ ).

Per rendere espressiva l'interpretazione, conviene introdurre anche il vettore unitario

$$(9) \quad \gamma = \alpha \wedge \beta,$$

che individua, assieme coi primi due, un triedro trirettangolo congruente ad  $Ox_0 x_1 x_2$ . A norma della (9), i coseni direttori  $\gamma_v$  (componenti del vettore  $\gamma$ ) valgono naturalmente

$$(9') \quad \gamma_v = \alpha_{v+1} \beta_{v+2} - \alpha_{v+2} \beta_{v+1} \quad (v = 0, 1, 2).$$

<sup>(1)</sup> Cfr. R), § 10.

<sup>(2)</sup> Ibidem, § 1.

Pensiamo  $\alpha, \beta, \gamma$  quali vettori fondamentali del sistema di assi fissi  $Oxyz$ , cui viene riferito il moto piano dei tre corpi, supponendo per maggior semplicità, gli assi  $Ox, Oy$  situati nel piano del moto, e quindi  $Oz$  perpendicolare a questo piano. In tale accezione,  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$  si interpretano come coseni direttori dell'asse  $Ox_v$ , rispetto al triedro (fisso)  $Oxyz$ ; e rimane complessivamente definita (rispetto al detto triedro) l'orientazione della terna  $Ox_1 x_2 x_3$ , o, se si vuole, di un generico corpo rigido  $C$  solidale con essa.

Ne consegue che ad ogni sestupla  $\xi_v, \eta_v$ , verificante le (1) fanno riscontro un ben determinato valore (positivo) di  $q$  e un'orientazione dell'ipotetico corpo  $C$ ; e, reciprocamente, da  $q$  e dall'orientazione di  $C$  si risale tosto, mediante le (7), alle  $\xi_v, \eta_v$ . Si può pertanto concludere che la configurazione del sistema  $S$  corrisponde biunivocamente all'insieme: parametro positivo  $q$ , orientazione di  $C$ .

### 3. — COMPORTAMENTO CINETICO.

La circostanza testè rilevata assicura che il sistema  $S$  rientra nella categoria di cui ci siamo diffusamente occupati nella Nota M) colla mira specifica di farne applicazione al problema attuale. Giova anzitutto richiamarsi ad essa per le formule di (Poisson)

$$(10) \quad \alpha' = \alpha \wedge \omega \quad , \quad \beta' = \beta \wedge \omega \quad , \quad \gamma' = \gamma \wedge \omega \quad ,$$

in cui, fungendo  $\tau$  da tempo, il vettore  $\omega$  rappresenta la velocità angolare (dell'ipotetico corpo  $C$  rispetto agli assi fissi  $Oxyz$ ).

Si ha poi, dalle (7) e (3) dei paragrafi precedenti,

$$\rho_v^2 = q^2(\alpha_v^2 + \beta_v^2)$$

ossia, badando all'identità  $\alpha_v^2 + \beta_v^2 + \gamma_v^2 = 1$ ,

$$(11) \quad \rho_v^2 = q^2(1 - \gamma_v^2) \quad (v = 0, 1, 2),$$

donde apparisce che le mutue distanze, e di conseguenza la funzione delle forze  $\frac{E}{U}$ , si esprimono esclusivamente per  $q$  e per le  $\gamma_v$ .

Passiamo alla forza viva  $T$  definita dalla (2). In base alle derivate delle (7),

$$(12) \quad \xi'_v = q'\alpha_v + q\alpha'_v \quad , \quad \eta'_v = q'\beta_v + q\beta'_v \quad ,$$

e alle (10), essa diviene ovviamente una forma quadratica dei quattro argomenti  $q'$  e  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (componenti del vettore  $\omega$  secondo gli assi  $Ox_0 x_1 x_2$ ). È facile constatare che i coefficienti si possono esprimere esclusivamente per la  $q$  e per le  $\gamma_v$  (rendendoli esenti dagli altri coseni  $\alpha_v, \beta_v$ ). Intanto,

a norma delle (2), (5) e (11), basta accertarlo per ognuno dei binomi  $\xi_v'^2 + \eta_v'^2$ . A tal uopo conviene esplicitare le componenti delle (10),

$$(10') \quad \begin{cases} \alpha_v' = \alpha_{v+1} \omega_{v+2} - \alpha_{v+2} \omega_{v+1}, \\ \beta_v' = \beta_{v+1} \omega_{v+2} - \beta_{v+2} \omega_{v+1}, \\ \gamma_v' = \gamma_{v+1} \omega_{v+2} - \gamma_{v+2} \omega_{v+1}, \end{cases}$$

e dedurne, quadrando e sommando le prime due, e tenendo presenti le relazioni di ortogonalità,

$$\alpha_v'^2 + \beta_v'^2 = (1 - \gamma_{v+1}^2) \omega_{v+2}^2 + (1 - \gamma_{v+2}^2) \omega_{v+1}^2 + 2\gamma_{v+1} \gamma_{v+2} \omega_{v+1} \omega_{v+2}.$$

Dopo ciò, l'asserto risulta tosto dalle (12), le quali, badando alle identità

$$\alpha_v^2 + \beta_v^2 = 1 - \gamma_v^2,$$

$$\alpha_v \alpha_v' + \beta_v \beta_v' = -\gamma_v \gamma_v' = -\gamma_v (\gamma_{v+1} \omega_{v+2} - \gamma_{v+2} \omega_{v+1}),$$

porgono

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi_v'^2 + \eta_v'^2 &= q'^2 (\alpha_v^2 + \beta_v^2) + 2q q' (\alpha_v \alpha_v' + \beta_v \beta_v') + q^2 (\alpha_v'^2 + \beta_v'^2) = \\ &= q'^2 (1 - \gamma_v^2) - 2q q' \gamma_v (\gamma_{v+1} \omega_{v+2} - \gamma_{v+2} \omega_{v+1}) + \\ &+ q^2 \{ (1 - \gamma_{v+1}^2) \omega_{v+2}^2 + (1 - \gamma_{v+2}^2) \omega_{v+1}^2 + 2\gamma_{v+1} \gamma_{v+2} \omega_{v+1} \omega_{v+2} \}. \end{aligned}$$

Ne desumiamo che anche la funzione lagrangiana (6) del problema trasformato,

$$\mathcal{A} = T + \frac{E}{U},$$

dipende, oltre che da  $q'$  e dalle  $\omega_v$ , esclusivamente da  $q$  e dalle  $\gamma_v$ . Si trova con ciò soddisfatta anche l'ipotesi complementare, di cui al § 3 della Nota M). Possiamo quindi valerci delle regole ivi stabilite per la costruzione delle equazioni del moto.

Rivolveremo il nostro calcolo a quella delle due forme miste che abbiamo chiamata canonico-euleriana, perchè, a differenza dell'altra (euleriano-lagrangiana), si presenterà automaticamente regolarizzata anche nell'intorno di eventuali urti binari.

#### 4. — CONIUGATE — EQUAZIONI LINEARI DA RISOLVERE PER PASSARE ALLA QUADRICA RECIPROCA.

Secondo la regola esposta al § 7 della Nota M), testè ricordata, partendo dalla  $T$  ( $q'$ ,  $\omega_v$ ;  $q$ ,  $\gamma_v$ ), si debbono introdurre gli argomenti  $p$ ,  $\Omega_v$  (coniugati a  $q$ ,  $\omega_v$ ) a norma delle equazioni

$$(14) \quad p = \frac{\partial T}{\partial q'} \quad , \quad \Omega_v = \frac{\partial T}{\partial \omega_v} \quad ,$$

e valersene per eliminare  $q'$  e le  $\omega_v$  dalla stessa  $T(q', \omega_v ; q, \gamma_v)$ . Indicando con  $\Theta(p, \Omega_v ; q, \gamma_v)$  la forma in tal guisa ottenuta ( $2\Theta$  è la quadrica reciproca di  $2T$ ), si ha senz'altro dalla (6) la funzione lagrangiana modificata (o hamiltoniana)

$$(15) \quad H = \Theta - \frac{E}{U}.$$

La diretta risoluzione delle (14) e la successiva eliminazione delle  $q', \omega_v$  da  $T$  richiederebbe tuttavia sviluppi non brevi, nè istruttivi, attesa la espressione abbastanza complicata di  $T(q', \omega_v ; q, \gamma_v)$  risultante dalle (2) e (13). Si arriva allo scopo in modo elegante e perspicuo, esprimendo mediante vettori ausiliari così le equazioni dei vincoli come  $T$  e le (14), ed eliminando poi comprensivamente gli elementi ausiliari con algoritmo vettoriale accomodato alle circostanze del caso.

5. — INTRODUZIONE DI VETTORI AUSILIARI — L'OMOGRAFIA VETTORIALE (DILATAZIONE)  $\mathcal{D}$ .

La sestupla  $\xi_v, \gamma_v$  si compendia opportunamente in due vettori  $\xi, \eta$ , aventi rispettivamente le  $\xi_v, \gamma_v$  per componenti secondo gli assi  $Ox_0 x_1 x_2$ .

Le derivate di questi vettori rapporto a  $\tau$ ,

$$\xi', \eta',$$

hanno in conformità, per componenti,  $\xi'_v, \eta'_v$ .

Mercè l'introduzione di questi vettori, si può attribuire alle equazioni (1) dei vincoli la forma

$$\xi \times \xi - \eta \times \eta = 0, \quad \xi \times \eta = 0,$$

con che le loro derivate rapporto a  $\tau$  si scrivono

$$(16) \quad \xi' \times \xi - \eta' \times \eta = 0, \quad \xi' \times \eta + \eta' \times \xi = 0.$$

Anche alle (12) si attribuisce ovviamente forma vettoriale: basta notare che, in base alle (7) e (10), i loro secondi membri si identificano colle componenti dei due vettori

$$\frac{q'}{q} \xi + \xi \wedge \omega, \quad \frac{q'}{q} \eta + \eta \wedge \omega,$$

talchè esse equivalgono a

$$(17) \quad \xi' = \frac{q'}{q} \xi + \xi \wedge \omega, \quad \eta' = \frac{q'}{q} \eta + \eta \wedge \omega.$$

Conviene ancora definire due altri vettori  $\Xi, \mathbf{H}$  aventi rispettivamente per componenti (sempre secondo gli assi  $Ox_0 x_1 x_2$ )

$$(18) \quad \begin{cases} \Xi_\nu = \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} = 4Um_\nu^* \rho_\nu^2 \xi'_\nu, \\ \mathbf{H}_\nu = \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} = 4Um_\nu^* \rho_\nu^2 \eta'_\nu. \end{cases}$$

Queste espressioni di  $\Xi_\nu, \mathbf{H}_\nu$  mostrano che i due vettori  $\Xi, \mathbf{H}$  risultano dall'applicare a  $\xi', \eta'$  una stessa omografia vettoriale, anzi una stessa dilatazione <sup>(1)</sup> avente per direzioni unite quelle degli assi  $Ox_\nu$ .

Designieremo con  $\mathcal{D}$  l'omografia inversa, cioè la dilatazione

$$(19) \quad \mathcal{D} = \left( \frac{1}{4Um_\nu^* \rho_\nu^2} \mathbf{u}_\nu \right) \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

che opera sui vettori fondamentali  $\mathbf{u}_\nu$  del triedro (unito)  $Ox_0 x_1 x_2$ , riducendone le lunghezze nel rapporto di 1 a  $\frac{1}{4Um_\nu^* \rho_\nu^2}$ . Potremo così compendiare le (18) (o meglio le loro risolventi rapporto a  $\xi'_\nu, \eta'_\nu$ ) nelle due relazioni vettoriali

$$(20) \quad \xi' = \mathcal{D}\Xi, \quad \eta' = \mathcal{D}\mathbf{H}.$$

Dacchè l'espressione (2) della forza viva è omogenea di secondo grado rispetto alle  $\xi'_\nu, \eta'_\nu$ , si ha dal teorema di Eulero

$$2T = \sum_0^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \xi'_\nu + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} \eta'_\nu \right).$$

Nel secondo membro riconosciamo i due prodotti scalari  $\Xi \times \xi', \mathbf{H} \times \eta'$ . Risulta quindi, in virtù delle (20),

$$(21) \quad 2T = \Xi \times \mathcal{D}\Xi + \mathbf{H} \times \mathcal{D}\mathbf{H}.$$

Per la costruzione delle equazioni del moto nella divisata forma canonico-euleriana, è mestieri far intervenire, a norma delle (14) del paragrafo precedente, lo scalare

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'},$$

e il vettore  $\Omega$  avente per componenti

$$\Omega_\nu = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Transformations linéaires* (Pavia, Mattei, 1912), pp. 20-22.

Occupiamoci di esprimere  $p$  ed  $\Omega$  in forma appropriata. All'uopo giova premettere che, se  $T$  dipende da un parametro generico  $\mu$ , pel tramite delle  $\xi'_\nu, \eta'_\nu$ , si ha, derivando,

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \sum_{\nu}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \frac{\partial \xi'_\nu}{\partial \mu} + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} \frac{\partial \eta'_\nu}{\partial \mu} \right),$$

ciò che, attesa la definizione dei vettori  $\Xi, \mathbf{H}, \xi', \eta'$ , equivale a

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \Xi \times \frac{\partial \xi'}{\partial \mu} + \mathbf{H} \times \frac{\partial \eta'}{\partial \mu}.$$

Se ne ricava in primo luogo, ponendo  $\mu = q'$  e badando alle (17),

$$(22) \quad p = \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{q} (\Xi \times \xi + \mathbf{H} \times \eta).$$

Se poi si nota che il vettore  $\omega$  si può esprimere, per mezzo delle componenti  $\omega_\nu$  e dei vettori fondamentali  $\mathbf{u}_\nu$ , sotto la forma

$$\sum_{\nu}^2 \omega_\nu \mathbf{u}_\nu,$$

si ha, dalle (17),

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \omega_\nu} = \xi \wedge \mathbf{u}_\nu, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial \omega_\nu} = \eta \wedge \mathbf{u}_\nu,$$

con che

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \Xi \times (\xi \wedge \mathbf{u}_\nu) + \mathbf{H} \times (\eta \wedge \mathbf{u}_\nu) = \mathbf{u}_\nu \times (\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta).$$

Il terzo membro è manifestamente la componente secondo  $Ox_\nu$  del vettore

$$\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta.$$

Il primo membro è, per definizione, l'analogica componente del vettore  $\Omega$ . Ne consegue la espressione di  $\Omega$  sotto la voluta veste vettoriale:

$$(23) \quad \Omega = \Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta.$$

6. — PASSAGGIO ALLA FORMA RECIPROCA  $2\Theta$   
MEDIANTE ELIMINAZIONI VETTORIALI.

Le definizioni (22), (23) di  $p$  ed  $\Omega$ , e le (16), poste, in virtù delle (20), sotto la forma equivalente

$$(24) \quad \mathfrak{D}\Xi \times \xi - \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta = 0, \quad \mathfrak{D}\Xi \times \eta + \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi = 0,$$

costituiscono in sostanza un sistema di sei equazioni lineari (non omogenee) nei due vettori  $\Xi, \mathbf{H}$ . Esse consentono quindi (in quanto siano indipendenti,

come infatti sono) di ricavarne le sei componenti in funzione lineare dei vari termini noti (che si riducono a  $p$  ed  $\Omega$ ), a coefficienti che possono *a priori* dipendere da  $\xi, \eta$  e dall'omografia  $\mathfrak{D}$ , ossia, complessivamente, da  $q, \alpha, \beta, \gamma$ . Portando queste espressioni dei due vettori  $\Xi, \mathbf{H}$  nella (21), la  $T$  diviene una forma quadratica nelle  $p, \Omega$ , (esente dai primitivi argomenti  $q', \omega_v$ ); e si ha la  $\Theta$  cercata, la quale si presenta altresì esente dalle  $\alpha_v, \beta_v$  (ha cioè i coefficienti che dipendono soltanto da  $q$  e dalle  $\gamma_v$ ): circostanza questa senz'altro prevedibile in base all'analogia proprietà del  $a T$ , già rilevata al § 3.

Anzichè eseguire per via diretta la risoluzione delle (22), (23), (24), e successiva sostituzione nella (21), conviene trasformare la (21) stessa a mezzo delle altre equazioni.

Dopo alquanti passaggi, tutti immediati sotto il duplice punto di vista concettuale e formale, l'eliminazione di  $\Xi, \mathbf{H}$  si troverà automaticamente compiuta.

Prepariamoci anzi tutto l'espressione esplicita di

$$(25) \quad W = \xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta.$$

Dacchè, a norma della (19), le componenti di  $\mathfrak{D}\xi, \mathfrak{D}\eta$  sono ordinatamente

$$\frac{1}{4Um_v^* \rho_v^2} \xi_v, \quad \frac{1}{4Um_v^* \rho_v^2} \eta_v, \quad \text{si ha subito, badando alle (3) e (4),}$$

$$(26) \quad W = \sum_v \frac{1}{4Um_v^*} = \frac{m^2}{4Um_0 m_1 m_2}.$$

Ciò premesso, riprendiamo l'espressione (21) di  $T$ , e scriviamola, sfruttando le (24), sotto la forma equivalente

$$2WT = (\Xi \times \mathfrak{D}\Xi + \mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\Xi \times \xi - \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta)^2 - (\mathfrak{D}\Xi \times \eta + \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)^2$$

Sviluppando materialmente il prodotto e i due quadrati del secondo membro, ove inoltre si aggiunga (ad esso secondo membro) il binomio, identicamente nullo per la proprietà caratteristica delle dilatazioni,  $2(\Xi \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\xi \times \mathfrak{D}\eta) - 2(\Xi \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\mathfrak{D}\xi \times \eta)$ , si dà a  $2WT$  la forma di somma dei sei termini seguenti:

$$t_1 = (\Xi \times \mathfrak{D}\Xi) (\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\Xi \times \xi)^2,$$

$$t_2 = (\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta)^2,$$

$$t_3 = (\Xi \times \mathfrak{D}\Xi) (\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\Xi \times \eta)^2,$$

$$t_4 = (\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)^2,$$

$$t_5 = 2\{(\Xi \times \mathfrak{D}\xi) (\eta \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) - (\Xi \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\mathfrak{D}\xi \times \eta)\},$$

$$t_6 = 2\{(\Xi \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) (\xi \times \mathfrak{D}\eta) - (\Xi \times \mathfrak{D}\eta) (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)\}.$$

Ciascuno di questi può essere trasformato usando l'identità

$$(A \times B)(C \times D) - (A \times D)(B \times C) = (A \wedge C) \times (B \wedge D)$$

valida qualunque siano i quattro vettori  $A, B, C, D$ .

In primo luogo, per

$$A = \Xi, \quad B = \mathcal{D}\Xi, \quad C = \xi, \quad D = \mathcal{D}\xi,$$

viene

$$t_1 = (\Xi \wedge \xi) \times (\mathcal{D}\Xi \times \mathcal{D}\xi),$$

da cui, cambiando  $\Xi, \xi$  in  $H, \eta$ ,

$$t_2 = (H \wedge \eta) \times (\mathcal{D}H \times \mathcal{D}\eta).$$

Assumendo poi

$$A = \Xi, \quad B = \mathcal{D}\Xi, \quad C = \eta, \quad D = \mathcal{D}\eta,$$

si ha

$$t_3 = (\Xi \wedge \eta) \times (\mathcal{D}\Xi \wedge \mathcal{D}\eta),$$

la quale, colla sostituzione di  $H, \xi$  a  $\Xi, \eta$ , porge

$$t_4 = (H \wedge \xi) \times (\mathcal{D}H \wedge \mathcal{D}\xi).$$

Infine, per

$$A = \Xi, \quad B = \mathcal{D}\xi, \quad C = \eta, \quad D = \mathcal{D}H;$$

e

$$A = \Xi, \quad B = \mathcal{D}H, \quad C = \xi, \quad D = \mathcal{D}\eta,$$

risulta rispettivamente

$$t_5 = 2(\Xi \wedge \eta) \times (\mathcal{D}\xi \wedge \mathcal{D}H) = -2(\Xi \wedge \eta) \times (\mathcal{D}H \wedge \mathcal{D}\xi),$$

$$t_6 = 2(\Xi \wedge \xi) \times (\mathcal{D}H \wedge \mathcal{D}\eta).$$

In ognuno dei termini  $t_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) così trasformati, figura un prodotto vettoriale del tipo

$$\mathcal{D}A \wedge \mathcal{D}B.$$

Dalla teoria delle omografie vettoriali si sa <sup>(1)</sup> che un tale prodotto dipende da  $A$  e da  $B$  esclusivamente pel tramite del loro prodotto vettoriale. E precisamente si ha

$$\mathcal{D}A \wedge \mathcal{D}B = R\mathcal{D}(A \wedge B),$$

l'operatore  $R$  applicato alla dilatazione  $\mathcal{D}$  producendo, a norma della (19), la dilatazione

$$(27) \quad \left( \frac{1}{16 U m_{\nu+1}^* m_{\nu+2}^* \rho_{\nu+1}^2 \rho_{\nu+2}^2} \mathbf{u}_\nu \right) \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

(1) Burali-Forti e Marcolongo, op. cit., pp. 38-39.

Applichiamo questa formula ai vari  $t_j$ , introducendo per brevità il simbolo operativo

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{W} R \mathfrak{D},$$

il quale, in virtù delle (4), (26) e (27), si scrive

$$(28) \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{4U} \left( \frac{1}{m_\nu \rho_{\nu+1}^2 \rho_{\nu+2}^2} \mathbf{u}_\nu \right) \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Otteniamo

$$\frac{1}{W} t_1 = (\Xi \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \xi),$$

$$\frac{1}{W} t_2 = (\mathbf{H} \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \eta),$$

$$\frac{1}{W} t_3 = (\Xi \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \eta),$$

$$\frac{1}{W} t_4 = (\mathbf{H} \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \xi),$$

$$\frac{1}{W} t_5 = -2(\Xi \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \xi),$$

$$\frac{1}{W} t_6 = 2(\Xi \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\mathbf{H} \wedge \eta).$$

Ora, in quanto  $\mathfrak{G}$  è essa stessa una dilatazione, si ha ovviamente

$$\frac{1}{W} (t_1 + t_2 + t_6) = (\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \xi + \mathbf{H} \wedge \eta),$$

$$\frac{1}{W} (t_3 + t_4 + t_5) = (\Xi \wedge \eta - \mathbf{H} \wedge \xi) \times \mathfrak{G}(\Xi \wedge \eta - \mathbf{H} \wedge \xi),$$

le quali, badando alla (23) e ponendo

$$(29) \quad X = \Xi \wedge \eta - \mathbf{H} \wedge \xi,$$

si scrivono più semplicemente

$$\frac{1}{W} (t_1 + t_2 + t_6) = \Omega \times \mathfrak{G}\Omega,$$

$$\frac{1}{W} (t_3 + t_4 + t_5) = X \times \mathfrak{G}X.$$

La somma delle  $t_j$  non è altro che  $2WT$ ; si ha quindi

$$2T = \Omega \times \mathfrak{G}\Omega + X \times \mathfrak{G}X.$$

È questa, come passiamo ad accertare, la voluta espressione  $2\Theta$  di  $2T$ , tosto esplicitabile come forma quadratica degli argomenti  $p, \Omega$ . E in verità essa è visibilmente funzione quadratica dei due vettori  $\Omega, X$ , a coefficienti che, a norma della (28), dipendono soltanto dalle  $\rho$ , ossia, per le (11), da  $q$  e dalle  $\gamma_v$ : l'asserto sarà quindi provato se constateremo che  $X$  è funzione lineare ed omogenea di  $p$ , e delle  $\Omega_v$ , con analoghi coefficienti.

All'uopo, partiamoci dall'osservazione che, attesa l'ortogonalità di  $\alpha, \beta, \gamma$ , si ha dalle (7):

$$\xi = \eta \wedge \gamma, \quad \eta = -\xi \wedge \gamma;$$

con che la (29) può essere scritta

$$X = -\Xi \wedge (\xi \wedge \gamma) - H \wedge (\eta \wedge \gamma).$$

D'altra parte, l'identità

$$\Xi \wedge (\xi \wedge \gamma) + \xi \wedge (\gamma \wedge \Xi) + \gamma \wedge (\Xi \wedge \xi),$$

ove si noti che, per l'ortogonalità fra  $\xi$  e  $\gamma$ , il termine medio si riduce a  $(\Xi \times \xi)\gamma$ , porge

$$-\Xi \wedge (\xi \wedge \gamma) = (\Xi \times \xi)\gamma + \gamma \wedge (\Xi \wedge \xi).$$

Poniamovi  $H, \eta$  al posto di  $\Xi, \xi$ , e sommiamo, tenendo conto delle (22) e (23). Risulta

$$(30) \quad X = pq\gamma + \gamma \wedge \Omega,$$

e rimane in definitiva acquisita per la forma reciproca l'annunciata espressione

$$(31) \quad 2\Theta = \Omega \times \mathfrak{C}\Omega + X \times \mathfrak{C}X,$$

la dilatazione  $\mathfrak{C}$  e il vettore  $X$  essendo rispettivamente definiti dalle (28) e (30).