ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

mann in tutte le sue proprietà. Infine il sale aranciato, con acqua di bromo, genera nitroprussiato e ferricianuro.

Chiudendo noterò che, pur non essendo finora noti gli acidi $NO \cdot NH \cdot CO \cdot SH$ e $NH_2 \cdot NH \cdot CO \cdot SH$ i cui aggruppamenti ho ammessi nei sali complessi che ho studiati, sono noti i corrispondenti ossigenati: l'acido del sale di Thiele $NO \cdot NK \cdot CO \cdot OK$, e l'acido idrazincarbonico $NH_2 \cdot NH \cdot CO \cdot OH$ del quale conosciamo anche un derivato solforato; la tiosemicarbazide $NH_2 \cdot NH \cdot CS \cdot NH_2$.

Matematica. — *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Scopo di questa breve Nota è di presentare a codesta illustre Accademia alcuni risultati da me ottenuti sui gruppi di sostituzioni operanti su infiniti elementi, e sulle loro applicazioni. La teoria svolta presenta relazioni con quella degli insiemi e con quella dei gruppi del Lie. Tralascio per ora di accennarne le applicazioni (1).

2. Chiameremo sostituzione l'operazione che da qualunque elemento α d'un certo insieme ci fa passare ad un elemento a dello stesso insieme; con la condizione che, se $\alpha \neq \beta$, sia anche $a \neq b$; le definizioni di prodotto, potenza, commutatività restano invariate.

Esistono sostituzioni che non ammettono l'inversa: come la sostituzione che operando sull'insieme numerabile $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ muta a_1 in $a_2, \ldots\, a_n$ in a_{n+1}.

Il concetto di sostituzione ciclica ordinaria si scinde in tre, nel nostro caso:

1°) *cicli*: sostituzioni che permutano n lettere secondo lo schema $(a_1\, a_2 \ldots a_n)$;

2°) *cicli infiniti chiusi, o anelli*: sostituzioni operanti su una infinità (necessariamente numerabile) di elementi secondo lo schema

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0\ \ a_1\, a_2\, a_3 \ldots \end{pmatrix},$$

e che segneremo $(\infty \ldots a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2 \ldots \infty)$; ammettono l'inversa;

3°) *cicli infiniti aperti, o catene*: operano secondo lo schema

$$\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots \\ a_2\, a_3 \ldots \end{pmatrix};$$

li segneremo $(a_1\, a_2 \ldots \infty)$; non ammettono sostituzione inversa.

(1) Le svolgerò in una prossima Nota.

Si ha il teorema: *Ogni sostituzione si decompone in cicli, anelli, catene operanti su elementi distinti.*

Inoltre: *La potenza n-esima di un anello è il prodotto di* $|n|$ *anelli staccati, per n intero positivo o negativo.*

La potenza n-esima di una catena è il prodotto di n catene staccate.

Introducendo il concetto di ordine delle sostituzioni nel solito modo, si hanno i seguenti tipi di sostituzioni: α) quelle ad ordine finito di cicli; β) quelle ad ordine finito ed un numero infinito di cicli; γ) quelle ad ordine infinito, composte di soli cicli; δ) quelle d'ordine infinito, composte anche d'anelli; ε) quelle con catene.

Nelle sostituzioni chiameremo *caratteristica* il complesso di elementi che mancano nel denominatore della sostituzione: quelli, cioè, da cui prendono origine le catene; e *rango* r il loro numero o la potenza del loro insieme.

3. Un certo insieme di sostituzioni si dirà formare gruppo se il prodotto di due sue qualunque sostituzioni appartiene al complesso; esso avrà ordine α e grado β, se α e β sono il numero o la potenza degli insiemi delle sostituzioni e degli elementi.

L'inversa d'una sostituzione (se esiste) non è necessariamente compresa nel gruppo; se è compresa — qualunque sia la sostituzione — il gruppo si dirà *completo.*

Un concetto, che nei gruppi ordinarî diventa quello d'eguaglianza, è quello che diremo di *subvarianza*: un gruppo (o complesso) Γ è subvariante di G, se il prodotto di due loro sostituzioni appartiene a G. Vale il teorema: *Se* G *possiede la sostituzione identica,* Γ *sarà un sottogruppo di* G. Inoltre, sulle caratteristiche si può dire: *Le sostituzioni d'un gruppo, aventi rango uguale o maggiore di* ν, *formano un sottogruppo*, che segneremo $(\nu\mathfrak{G})$; il sottogruppo $(1\mathfrak{G})$ lo diremo *di irreversibilità.* Oltre questo, vi è il sottogruppo composto da tutte le sostituzioni che ammettono inversa: lo diremo *primo sottogruppo d'inversione*, e lo segneremo $(J\mathfrak{G})$; così anche v'è il sottogruppo di tutte le sostituzioni che ammettono inversa, appartenente ancora al gruppo: *secondo sottogruppo d'inversione* o $(i\mathfrak{G})$; esso è sottogruppo di $(J\mathfrak{G})$. Vi è inoltre il *terzo gruppo d'inversione* o $(f\mathfrak{G})$; esso è composto dall'insieme di sostituzioni del gruppo aventi ordine finito, ed è sottogruppo di $(i\mathfrak{G})$; infine v'è il *sottogruppo di non inversione* o $j\mathfrak{G}$, composto dalle sostituzioni la cui inversa esiste ma non appartiene al gruppo. Si ha il teorema:

Qualunque gruppo si decompone identicamente nella somma di $(1\mathfrak{G}), (i\mathfrak{G}), (j\mathfrak{G})$: cioè

$$\mathfrak{G} = (1\mathfrak{G}) + (J\mathfrak{G}) \; ; \; (J\mathfrak{G}) = (i\mathfrak{G}) + (j\mathfrak{G}) \; ; \; \mathfrak{G} = (1\mathfrak{G}) + (i\mathfrak{G}) + (j\mathfrak{G});$$

$(J\mathfrak{G}), (i\mathfrak{G})$ *sono subvarianti ad* $(1\mathfrak{G})$; $(j\mathfrak{G})$ ad $(i\mathfrak{G})$.

Quindi, per tale teorema, basta studiare separatamente i gruppi $\mathfrak{G}$, coincidenti con $(1\mathfrak{G})$ (*gruppi di prima specie*); quelli coincidenti con $j\mathfrak{G}$ (*gruppi di seconda specie*); quelli coincidenti con $i\mathfrak{G}$ (*gruppi di terza specie*). Questi ultimi sono la immediata estensione degli ordinarî.

Si presenta la quistione di convergenza d'un insieme ben ordinato (in particolare numerabile) di sostituzioni operanti su insiemi d'elementi. Diremo che un insieme ben ordinato di sostituzioni S converge *astrattamente* ad una sostituzione Σ, se, scelto un elemento ξ, si possa sempre trovare una sostituzione S_ξ tale che essa e tutte le seguenti mutino sempre ξ nello stesso elemento η: Σ muterà ξ in η; in modo analogo per la divergenza astratta e l'indeterminazione astratta. In tal modo, si possono costruire dei criterî di convergenza astratta per lo studio dei prodotti di infinite sostituzioni: $S_1 . S_2 . S_3, \ldots$

Si vede che il simbolo (A , B), gruppo generato dai complessi A e B, può avere infiniti significati. Infatti, delle sostituzioni limiti, noi possiamo sceglierne solo alcune — secondo un criterio γ — come appartenenti ad (A , B): in particolare nessuna o tutte.

Un gruppo generico $\mathfrak{G}$ si dirà chiuso se tutte le sue sostituzioni limiti vi appartengono; aperto, nel caso contrario; totalmente aperto se nessuna v'appartiene, salvo le evidenti

$$\Sigma = \lim S_n \quad ; \quad S_n = S .$$

I gruppi ordinarî sono tali che dànno luogo a successioni (*o insiemi ben ordinati*) *astrattamente indeterminate.*

4. I gruppi di prima specie hanno una costituzione particolarmente semplice: se, per ricorrenza, indichiamo con C_n il complesso di sostituzioni

$$(n\mathfrak{G}) - \Sigma C_{r_1} \ldots C_{r_m} \qquad (r_1 + \cdots r_m = n),$$

con $(e\mathfrak{G})$ indichiamo poi l'insieme di sostituzioni a caratteristica finita, e con $(\omega\mathfrak{G})$ quello a caratteristica infinita, avremo

$$\mathfrak{G} = (1\mathfrak{G}) = (e\mathfrak{G}) + (\varpi\mathfrak{G}) = C_1 + (2\mathfrak{G}) = C_1 + [C_1C_1 + C_2] + (3\mathfrak{G}) = \cdots$$

Ma $(e\mathfrak{G})$ è un gruppo aperto generato da $C_1, C_2, C_3, \ldots$ secondo la legge

$$(e\mathfrak{G}) = C_1 + [C_1C_1 + C_2] + [C_1C_1C_1 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3] + \cdots ;$$

$\varpi\mathfrak{G}$ invece è eguale alla somma del complesso $\gamma\,(e\mathfrak{G})$, costituito dalle sostituzioni limiti di $e\mathfrak{G}$ scelte secondo il criterio γ — e d'un sottogruppo $\mathfrak{G}'$ — chiuso secondo γ: quindi abbiamo

$$\mathfrak{G} = (e\mathfrak{G}) + \gamma(e\mathfrak{G}) + \mathfrak{G}' .$$

Notiamo che $\mathfrak{G}'$ a sua volta si decompone nella somma di altrettanti complessi $\mathfrak{G}'_\alpha$ relativi alle diverse potenze (d'insieme) α: e supposta conosciuta la teoria di queste, si potrebbe continuare nella decomposizione.

Se nelle catene di $C_1, C_2, \ldots$ noi pensiamo introdotti degli elementi α in modo da trasformare in anelli le catene [1], diremo questi elementi *ideali*, e noi passeremo da un gruppo di prima specie ad uno di seconda; e se reciprocamente consideriamo certi elementi effettivi come ideali, passeremo da uno di seconda ad uno di prima specie. Fra le sostituzioni allora ve ne saranno alcune che muteranno elementi effettivi in ideali: le diremo sostituzioni ideali; esse si trovano completando il gruppo di seconda specie mediante le sostituzioni inverse.

Quindi si ha: *Con l'introduzione degli elementi ideali* (riguardando cioè certi elementi come effettivi, altri come ideali) *ogni gruppo di seconda specie è oloedricamente isomorfo ad uno di prima.*

Il concetto di transitività si scinde in diversi altri: secondo che esiste almeno un elemento che si può trasformare in qualunque altro o che sia il trasformato, o se un qualunque elemento si può trasformare in qualunque altro. Vi è infine il concetto di quasi-transività: se gli elementi si possono raggruppare in un insieme ordinato di insiemi, sì che un elemento d'un insieme A si può trasformare in uno di B, solo se A precede B nell'ordinamento.

Con qualunque di essi vale il teorema:

Un gruppo di transitività α-pla, di grado β, deve essere d'ordine maggiore di α^β: e precisamente d'ordine

$$\beta_\alpha \cdot \varpi ,$$

ove ϖ sia il massimo ordine di sottogruppi lascianti fermi α elementi, e se almeno uno dei tre numeri α, β, γ è un transfinito.

Se un gruppo è regolare-numerabile, la sua transitività deve essere finita.

Se un gruppo è regolare-continuum, la sua transitività deve essere finita o numerabile, ecc.

5. Oltre la convergenza astratta, si presenta la convergenza relativa o concreta. Data un opportuna definizione di scarto di due elementi e di elementi limiti, ed assegnata una qualunque successione (o insieme ordinato) di sostituzioni del gruppo, diremo che questa converge concretamente ad una sostituzione Σ, se, scelto l'elemento a, cui $S_1, S_2, \ldots$ fanno corrispondere $a_1, a_2, \ldots$, hanno luogo le due proprietà:

I) qualunque successione $a_1 a_2 \ldots$ tende sempre ad un unico elemento-limite α;

[1] Così da $(a_1 a_2 a_3 \cdots \infty)$ avremo la $(\infty \cdots \alpha_2 \alpha_1 a_1 a_2 a_3 \cdots \infty)$.

II) qualunque sia $a \neq a'$, sarà anche $\alpha \neq \alpha'$.

La Σ sarà una sostituzione propria, se tutte le α appartengono all'insieme degli elementi; impropria, nel caso contrario.

Un gruppo si dirà *quasi-ordinato*, se, scelta una successione d'elementi tendente ad un elemento dell'insieme stesso, una qualunque sostituzione muta tale successione in una avente la stessa proprietà; si dirà *ordinato* se si ha anche che le successioni tendenti ad elementi che non appartengono all'insieme sono mutate in successioni analoghe.

Si ha: *Un gruppo quasi-ordinato può essere chiuso con delle sostituzioni proprie.*

Un gruppo ordinato può essere ampliato, aggiungendo, ai suoi elementi, tutti gli elementi limiti, ed alle sue sostituzioni tutte quelle improprie: esso resterà ordinato; il nuovo gruppo sarà « riducibile ».

Infine un gruppo ordinato $\mathfrak{G}$ si dirà connesso, se, date due sostituzioni

$$\mathrm{S} \equiv \begin{pmatrix} \ldots a\, b \ldots \\ \ldots \alpha \beta \ldots \end{pmatrix} \quad \mathrm{T} \equiv \begin{pmatrix} \ldots a\, b \ldots \\ \ldots \mathrm{A\,B} \ldots \end{pmatrix},$$

e due numeri, ε piccolo a piacere, η grande a piacere, si possano determinare un numero finito di sostituzioni

$$\mathrm{S}_r \equiv \begin{pmatrix} \ldots a \quad b \ldots \\ \ldots \alpha_r\, \beta_r \ldots \end{pmatrix},$$

in modo che, se lo scarto di a e b è minore di η, sieno minori di ε gli scarti di β, b; β_1, β; ...; β_n, β_{n+1}; B, β_n ed α, a; ...; A, α_n.

I gruppi del Lie sono regolari-continuum, ordinati, connessi, riducibili.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Un sistema regolare di integrali [1] riducibili appartenente a una varietà algebrica si dice *isolato* (su di essa), allorchè ammette uno ed un solo sistema regolare complementare; o, ciò che fa lo stesso, quando è nullo il suo *coefficiente di immersione* [2].

Se un sistema regolare è isolato, tale è pure il suo complementare; quindi i sistemi regolari di una varietà algebrica, ove esistano, si distribuiscono in coppie di sistemi complementari.

[1] Secondo il solito, per brevità di discorso, diciamo « integrali » senz'altro, al posto di « integrali semplici di 1ª specie ».

[2] Cfr. Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 393-400].