ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fra le alotrichiti note nella scienza, questa di Rio, per l'aspetto esterno ed anche per le poche proprietà fisiche che furono potute determinare, si accosta, più che alle altre, a quella di Tierra Amarilla presso Copiapò (Cile) [1], anch'essa originata dalla alterazione di materiali piritosi.

Meno somiglia invece al materiale di origine vulcanica, che ha la stessa composizione chimica, scoperto da A. Scacchi [2] tra i prodotti della solfatara di Pozzuoli e da lui chiamato alotrichina: questo, nei campioni che ho potuto osservare, si presenta in fibre più corte e più esili, costituenti piuttosto una specie di feltro cristallino che non una massa relativamente compatta a struttura fibrosa subparallela.

Alotrichiti di origine vulcanica furono descritte da Bellini [3] per la grotta dello Zolfo a Miseno, e recentemente da Panichi [4] per i Faraglioni di Vulcano. A questo proposito è opportuno di notare che le mie osservazioni intorno alla variabilità dell'angolo di estinzione nell'alotrichite di Rio confermano le analoghe osservazioni sul minerale dei Faraglioni di Vulcano fatte da Panichi, il quale crede probabile che l'angolo di estinzione nelle alotrichiti sia variabile insieme col loro contenuto di ferro e forse anche di acqua.

Meccanica. — *Profili di pelo libero in canali di profondità finita.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

L'applicazione sistematica del criterio adottato da lord Rayleigh per dare una esauriente giustificazione teorica del fenomeno della *onda solitaria* [5] si è già mostrato parecchie altre volte utile nella trattazione approssimata di moti ondosi o, più generalmente, di questioni riguardanti moti fluidi laminari che, avendo sede in piani verticali, sono strettamente connessi alla gravità [6].

(1) Linck G., *Beitrag zur Kenntniss der Sulfate von Tierra Amarilla bei Copiapò in Chile.* Zeitschr. f. Kryst. *15*, 1889, pag. 1.

(2) Scacchi A., *Memorie geologiche della Campania.* Napoli, Rend. Acc. sc., *9*, 1850, pag. 84.

(3) Bellini R., *La grotta dello zolfo nei campi Flegrei.* Roma, Boll. Soc. geol. ital., *20*, 1901, pag. 470.

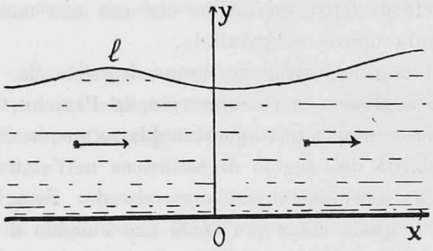
(4) Panichi U., *Contributo allo studio dei minerali dell'isola di Vulcano.* Roma, Mem. Soc. XL, (ser. 3ª), *19*, pag. 3.

(5) Scientific papers, vol. I, pag. 256.

(6) Cisotti, *Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso* [questi Rendiconti, vol. XX (1911), pag. 633; oppure Zeitschrift für Math. und Phys., B. 61 (1912), pag. 76]; *Sopra l'efflusso a stramazzo* [questi Rend., vol. XXI (1912), pag. 97]; *Sull'efflusso di un liquido pesante da un orificio circolare* [questi Rend., vol. XXIII (1914), pag. 324]; *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali* [questi Rendiconti, vol. XXIII, pag. 556; ibid., vol. XXIV (1915), pag. 129; oppure Nuovo Cimento, vol. XI (1915), pag. 242].

Mi si conceda di esporre un'altra applicazione del medesimo criterio, allo scopo di assegnare le varie forme che il profilo del pelo libero può assumere in canali rettilinei di profondità finita.

Si supponga, al solito, che il moto avvenga, regolarmente e senza vortici, per piani verticali paralleli e, in uno generico di essi, entro una striscia limitata da una retta orizzontale indefinita (fondo del canale) e da una linea l (pelo libero) pure indefinita (vedi figura).



Sieno: q la portata, che si suppone costante; g l'accelerazione di gravità. Si può mettere in rilievo che — entro limiti convenienti — sono possibili infinite forme del pelo libero e soddisfacenti a tutte le debite condizioni dinamiche. Esse rientrano analiticamente nel tipo seguente (il sistema di riferimento è indicato in figura):

$$F(y\,,\eta) = 0\,,$$

dove si è posto

$$\eta = x + \left(\frac{gy^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t\,,$$

e F rappresenta una funzione arbitraria degli argomenti indicati, mentre t rappresenta il tempo; si è naturalmente assunta eguale ad 1 la densità del liquido.

Questa circostanza, che mi sembra degna di rilievo, mi permetterò di discutere in seguito. Per ora mi limito a segnalarla e a giustificarla.

1. Per essere il moto regolare ed irrotazionale, esisteranno due funzioni

$$\varphi(x\,,y\,;t) \qquad \text{(potenziale di velocità)},$$
$$\psi(x\,,y\,;t) \qquad \text{(funzione di corrente)},$$

armoniche e regolari nella striscia, e legate tra loro dalle relazioni differenziali

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,.$$

Scende da queste che, posto

$$z = x + iy \quad , \quad f = \varphi + i\psi ,$$

f è funzione della variabile complessa z (oltre che di t); scriveremo pertanto

$$\varphi + i\psi = f(z\,;t) = f(x + iy\,;t) . \tag{1}$$

Le condizioni al contorno provengono dall'esprimere:

a) che tanto il fondo del canale, quanto il pelo libero l, sono linee di flusso;

b) che la linea l è pelo libero, cioè lungo essa la pressione deve essere costante (ed eguale alla pressione atmosferica).

Alla prima di queste condizioni si soddisfa esprimendo, notoriamente, che tanto sul fondo, quanto sul pelo libero, la funzione di corrente ψ deve avere valori costanti. Si assuma

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad y = 0 , \\ q & \text{sopra} \quad l ; \end{cases} \tag{2}$$

con ciò viene messo in evidenza che q è la portata della corrente.

Per soddisfare alla condizione *b*), ricordiamo che, posto

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 ,$$

le equazioni idrodinamiche di Eulero si compendiano nell'unica relazione (la densità essendo $= 1$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + gy + p = \text{funzione della sola } t ,$$

dove p designa la pressione.

Sopra l dev'essere p costante: dunque

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + gy = \text{funzione della sola } t, \text{ sopra } l . \tag{3}$$

Le (2) e la (3) esauriscono le condizioni al contorno.

2. Per soddisfare a queste condizioni, conviene partire dalla (1) e, applicando l'artificio di lord Rayleigh, sviluppare la $f(x + iy\,;t)$ in serie di Taylor, rispetto alle potenze di y.

Si avrà

$$\varphi + i\psi = f(x\,,t) + iy\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots$$

Ora, poichè, per la prima delle condizioni (2), la f dev'essere reale per z reale, avremo, separando nella precedente la parte reale dalla parte immaginaria,

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi = f - \dfrac{y^2}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots, \\ \psi = y\dfrac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \end{cases}$$

dove, s'intende, la f e le sue derivate dipendono, in generale, oltre che dalla variabile x, anche dal tempo t.

È lecito sfruttare le (4) tutte le volte si possa, sia pure *a posteriori*, legittimarne l'uso, per ciò che concerne la convergenza e la derivabilità delle serie ivi indicate [1],

Supponiamo che di ciascuna delle serie (4) si possano trascurare i termini seguenti il primo.

Si ha allora

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi = f, \\ \psi = y\dfrac{\partial f}{\partial x}. \end{cases}$$

Notiamo che la condizione al fondo è soddisfatta, qualunque sia la funzione $f(x\,;t)$. Rimangono le due condizioni sul pelo libero: la seconda delle (2) e la (3). Tenendo presenti le (5), tali condizioni si possono esprimere nel modo seguente:

$$(6)\qquad \begin{cases} y\dfrac{\partial f}{\partial x} = q, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + gy = \text{funzione della sola } t, \\ \qquad\qquad (\text{sopra } l). \end{cases}$$

La eliminazione della f tra queste, fornisce un'unica relazione tra la y, x e t, che definisce ad ogni istante la forma del pelo libero l.

3. Eliminando in quest'ultima la $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, a mezzo della prima, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{y^2} + gy = \text{funzione della sola } t.$$

[1] Cfr., a tale proposito, Levi-Civita, *Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da lord Rayleigh* [questi Rend., vol. XX (1911), pp. 605 e segg.].

Derivando rispetto ad x e tenendo conto della prima delle (6) nell'eliminazione della $\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x}$, si ottiene infine:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{q}{y} - \frac{g y^2}{q}\right) \frac{\partial y}{\partial x} = 0 . \tag{7}$$

È questa l'equazione differenziale del pelo libero l.

Come si vede, si tratta di un'equazione a derivate parziali del primo ordine, la quale contiene esplicitamente la funzione incognita.

La sua integrazione rientra notoriamente nella teoria generale delle equazioni del tipo accennato; l'integrale generale si ha subito, ponendo

$$\eta = x + \left(\frac{g y^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t \tag{8}$$

ed uguagliando a zero una funzione arbitraria F dei due argomenti y ed η:

$$F(y, \eta) = 0 \text{ [1]}. \tag{9}$$

Rimarrebbe ora da rendersi conto delle circostanze secondo cui sono applicabili i risultati ottenuti.

E di ciò in una prossima Nota.

[1] Infatti, posto per un momento

$$Y = \frac{q}{y} - \frac{g y^2}{q} ,$$

la (7) può scriversi

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Y \frac{\partial y}{\partial x} = 0 . \tag{7'}$$

Considerando la y definita in modo implicito da una relazione

$$F(y, x, t) = 0 ,$$

con che

$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial y}} , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} ,$$

la (7') diviene

$$\frac{\partial F}{\partial t} + Y \frac{\partial F}{\partial x} = 0 , \tag{7''}$$

la quale equivale, notoriamente, al sistema differenziale ordinario

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{Y} = \frac{dy}{0} ,$$

nel senso che l'integrale generale di (7'') ha la forma

$$F(f_1, f_2) ,$$

essendo $f_1 =$ costante, $f_2 =$ costante due integrali indipendenti del sistema differenziale precedente. È manifesto che $y =$ costante è uno, e allora $x - tY$ è un altro; c. d. d.