# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIV.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Storia della matematica. — *Sulle scoperte di Pietro Mengoli.* Nota I di GIOVANNI VACCA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

I. Le opere di Pietro Mengoli [1], scolaro di Bonaventura Cavalieri, furono poco apprezzate e poco lette fino ai nostri giorni, sebbene vi sia stato chi seppe trar profitto dall'opera sua e dalle sue fatiche, senza riconoscere, anzi cercando di nascondere la fonte a cui attinse.

Vi sono alcuni teoremi che meritano di portare il nome del loro primo scopritore Pietro Mengoli; ed io spero che questo breve scritto potrà persuadere gli studiosi imparziali e sinceri a tributare il dovuto omaggio ad un matematico italiano il quale, se non fu tra i primi, pur fece *qualche cosa.*

Le opere di Pietro Mengoli, descritte dal Riccardi [2], delle quali parlerò, sono:

1. *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*, Bononiae, 1650, 8 fol. n. n., pp. 130. in-8°.
2. *Via regia ad mathematicas*..., Bononiae, 1655, 64 pp., in-8°.
3. *Geometria speciosa. Geometriae speciosae elementa*, Bononiae, Ferroni, 1659, pp. 80, 392, in-8°.
4. *Circolo del Mengoli*, Bologna, 1672. 4 fol. n. n., pp. 60, in-8°.
5. *Anno di Pietro Mengoli*, Bologna, 1673, fol. 12 n. n., pp. 280, in-8°.
6. *Arithmeticae rationalis elementa quatuor*, Bononiae, 1674, pp. 64, in-8°.

Queste opere si trovano nelle principali biblioteche italiane. Converrà inoltre osservare che esse furono conosciute e studiate dal Collins in Inghilterra, il quale le ebbe forse dal Wallis per mezzo del Borelli [3]; di un'altra copia, esistente in Germania, si parla nella corrispondenza di Huygens [4]; Leibniz ammise di conoscerle, come poi si dirà. Infine una copia di queste opere si trovava nella Biblioteca dell'Università di Lovanio, ora distrutta, e fu appunto questa la copia che io ebbi occasione di studiare per la prima volta ne' primi giorni di settembre del 1910.

[1] Pietro Mengoli, nato in Bologna nel 1625, morì in Bologna il 7 giugno 1686. Oltrechè di matematica, scrisse pure una importante opera sulla musica, ricordata con lode dagli storici della musica, intitolata: *Speculazioni di musica*, Bologna, 1670, 295 pp. in 8°.

[2] P. Riccardi, *Bibliot. mathematica.*

[3] Cfr. G. Eneström, *Zur Geschichte der Unendlichen Reihen in die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts*, Bibl. mathematica, 1912, vol. 12°, ser. 3ª, pp. 135-148.

[4] Huygens, *Oeuvres*, tomo 3, pag. 433; lettera di G. Schott a Chr. Huygens, 28 dicembre 1661: « Est hîc qui ex ultimis nundinis Francofurtensibus huc attulit...... « *Elementa Geometriae speciosae et Geometria speciosa*..... ».

II. La più importante di queste opere è senza dubbio la prima, del 1650; dal che si può concludere che il Mengoli (il quale fu, com'egli dice, priore di S. Maddalena, professore di meccaniche nel collegio dei nobili di Bologna, filosofo collegiato, dottor di leggi), non continuò che per breve tempo nell'indirizzo ricevuto dal suo maestro.

Come notò recentemente G. Eneström (¹), e come aveva notato lo stesso Mengoli (²), è nella prefazione all'opera stessa che sono contenute importanti scoperte. Converrà quindi riferirne qualche passo (³).

« Meditanti mihi persaepe Archimedis parabolae quadraturam, propter- « quam infinita triangula in continue quadrupla proportione existentia certos « limites quantitatis non excedunt, occurrit universalis illa quadratura « eiusdem argumenti occasione a geometris demonstrata, qua magnitudine « infinitae continuam quamlibet proportionem maioris inaequalitatis possi- « dentes in praefinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile sane « theorema, cuius contemplatione in eam quaestionem inductus sum, utrum « magnitudines ea quacunque lege dispositae, ut aliqua possit assumi minor « qualibet proposita, vel ut deficientes in infinitum evanescant, infinitae « compositae omnem propositam quantitatem valeant superare . . . ».

Pervenuto così all'idea generale di serie il cui termine generale tende a zero, il Mengoli continua enunciando (⁴) e dimostrando che le frazioni

$$\frac{1}{2}\;\frac{1}{3}\;\frac{1}{4}\;\frac{1}{5}\;\frac{1}{6}\;\frac{1}{7}\;\frac{1}{8}\;\frac{1}{9}\;\ldots,$$

« in infinitum dispositae et aggregatae, infinitam extensionem valent implere »; ovvero le stesse frazioni « superant quamlibet propositam quantitatem ».

La dimostrazione è semplice, come appare dalle sue stesse parole:

« Sit, exempli gratia, numerus assignatus 4, et sumantur a ternario « quatuor continue proportionales in subtripla, 3, 9, 27, 81, quorum summa « 120; igitur sumptae fractiones in multitudine numeri 120 superant assi- « gnatum numerum 4, nam prime tres superant . . . unitatem, novem dein- « ceps . . . superant unitatem; et propter eamdem demonstrationem [che è « qui inutile di riprodurre, perchè è oggi classica ed evidente], 27 et 81 « subsequentes singulas unitates superabunt ».

(¹) op. cit., pag. 138.
(²) *Geometria speciosa*, pag. 363.
(³) *Novae quadraturae arithmeticae, praefatio.*
(⁴) È singolare come l'Eneström, nell'art cit., pag. 136, non renda giustizia a Mengoli, pretendendo che nello scritto del Mengoli manchi la *conclusione* (*Schlussfolgerung*). Essa c'è, e più volte ripetuta. È veramente ingiusto, dopo aver letto il Mengoli, l'attribuire ancora a Giacomo Bernoulli il merito di aver enunciato per il primo nel 1689, la la divergenza della serie armonica.

Da questo primo teorema, che è cioè infinita la somma della serie armonica, il Mengoli trae due corollarî.

« Primum, quod eadem dispositio, a quocumque ordinetur principio, in « infinitum extenditur; utpote si dispositarum fractionum prima sit $\frac{1}{5}$, et « aliae deinceps adhuc ipsam dispositionem $\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$ &c. propositum « quemvis numerum superare posse: finitum enim est aggregatum ex iis, « quae sunt omissae $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$, et finiti ab infinito subtractio finitum relin- « quere non potest ».

L'altro corollario è che è parimenti infinita la somma dei reciproci di qualsivoglia progressione aritmetica.

Essendo infatti $b$ e $c$ due interi positivi, se la serie, il cui termine generale è $\frac{1}{b+nc}$, si confronta colla serie il cui termine generale è $\frac{1}{b+n}$, cioè la serie armonica a partire dal termine $\frac{1}{b}$, il rapporto di due termini corrispondenti delle due serie è maggiore di $\frac{1}{c}$, dal che segue che non si può assegnare nessun valore finito alla serie $\sum \frac{1}{b+nc}$, poichè questo valore, moltiplicato per $c$, supererebbe la somma della serie $\sum \frac{1}{b+n}$, il che è assurdo.

III. Il Mengoli procede poi ad esaminare le somme dei reciproci dei numeri triangolari

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}\ \text{ecc.}$$

e trova che « propositae fractiones aggregatae infinitae sunt aequales unitati ».

Poi continua dicendo:

« Ab huius fractionum dispositionis contemplatione feliciter expeditus, « ad aliam progrediebar dispositionem in qua singulae unitates numeris qua- « dratis denominantur. Haec speculatio fructus quidem laboris rependit, non- « dum tamen affecta est solvendo, sed ingenii ditioris postulat adminiculum, « ut praecisam dispositionis, quam mihimetipsi proposui, summa valeat « reportare »

E veramente difficile era questo problema di trovare la somma dei reciproci dei quadrati dei numeri. Leibniz, sebbene a lungo vi studiasse, pur facendo passare per suo (¹) il desiderio di investigare la somma di questa serie, non vi riuscì.

(¹) In una lettera a Giovanni Bernoulli del novembre 1696 scriveva:
« Circa summam harmonicorum nondum mihi satisfeci, et vereor ne sim deceptus.

Occorreva ancora quasi un secolo, prima che Eulero (¹) riuscisse a calcolarla, adoperando (come Giovanni Bernoulli (²) aveva osservato), un elegantissimo teorema di Newton.

Il Mengoli riesce però a trovare le somme delle serie

$$\sum \frac{1}{n^2+n}, \quad \sum \frac{1}{n^2+2n}, \quad \sum \frac{1}{n^2+3n}, \ldots$$

« Unitates denominatae compositis ex quadratis ab unitate. et lateribus « eorumdem dispositae in infinitum et aggregatae, sunt aequales unitati ».

« Unitates denominatae compositis, ex quadratis ab unitate, et lateribus eorumdem duplis dispositae in infinitum, et aggregatae, sunt aequales $\frac{3}{4}$ ».

Nel secondo libro dimostra poi (pag. 63):

« Unitates denominatae solidis omnium numerorum ab unitate in infi- « nitum dispositae, et aggregatae, sunt aequales quartae parti unitatis »:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}+\text{ecc.}=\frac{1}{4}$$

« Unitates denominatae solidis omnium imparium ab unitate, dispositae « in infinitum, et aggregatae, sunt aequales $\frac{1}{12}$ »:

$$\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\ldots=\frac{1}{12}.$$

E così prosegue poi a generalizzare ancora alquanto questi risultati che invano Leibniz tentò di appropriarsi nella sua lettera (³) ad Oldenburg del 3 febbraio 1672/3:

« Multa alia... observata sunt a me, ex quibus illud eminet, quod « modum habeo summam inveniendi seriei fractionum in infinitum decre-

« Interim circa cognata proponam quae olim in mente venere, ubi et iudicium tuum et « auxilium desidero.

« Quaeritur summa horum numerorum $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc.?... ».

*Commercium phylosophicum* Leibnitii et Bernoullii, Lausannae, 1745, tomo 1, pag. 213.

(¹) Euler, « Comm. Acc. scient. Petrop. », tomus VII ad annos 1734-1735, Petropoli, typis Acad. 1740, *De summis serierum reciprocarum*, pag. 124: « Deductus sum autem « super omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$ « expressionem quae a circuli quadraturae pendet..... Inveni enim summae huius seriei « sextuplum aequalem esse quadrato circuli cuius diameter est 1 ».

(²) Johannis Bernoulli, *Opera Omnia*, 1742, tomo IV, pag. 25.

(³) Edizione di Gehrhardt, pag. 78.

« scentium, quorum numerator unitas, nominatores vero triangulares, aut py-
« ramidales etc. ».

E facendogli Oldenburg osservare che Collins aveva già letto in Mengoli questi risultati, Leibniz risponde (1): « Cum Mengoli liber non sit ad « manus, videri ex relatione vestra, Mengolum summam tantum iniisse seriei « talium fractionum finitae, v. g. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, me vero invenire « summam totius seriei infinitae $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ etc. ... Si tamen idem et « Mengolus praestitit, non miror; saepe enim concorrere solent diversi ».

Chi potrà credere che Leibniz ignorasse Mengoli? Tanto più che nella minuta di una lettera precedente, non giunta ad Oldenburg, si scusa in altro modo: « quamquam enim nondum mihi inquirendi in Mengolum otium « fuerit... » (2).

Non sarebbe stato più naturale che Leibniz, così avido lettore, se non conosceva Mengoli, avesse chiesto ad Oldenburg notizie intorno a Mengoli? Ma non ne aveva forse bisogno.

IV. Il *Circolo* del Mengoli è un opuscolo che ha pure subìto un giudizio ingiusto da parte di Montucla (3). Non è davvero egli uno dei tanti *quadratori del circolo* ma egli espone veramente una quadratura del circolo esatta, quella per mezzo di un prodotto infinito, scoperta dal Wallis. Mengoli non parla mai di Wallis, sebbene la sua *Arithmetica infinitorum*, pubblicata nel 1655, dovesse essere giunta in Italia.

Egli dice di aver trovato il risultato (4), da molto tempo cercato, nell'anno 1660, cinque anni dopo la pubblicazione dell'opera del Wallis. Per quanto oscuramente esposta, sebbene forse con metodo più rigoroso, la via del Mengoli è sostanzialmente la stessa di quella del Wallis, tanto che io crederei che, sebbene ne taccia il nome, il Mengoli abbia veramente conosciuto l'opera del grande geometra inglese (5). Soltanto forse a causa

(1) Leibniz an Oldenburg, Paris, 14 Maij 1673; ed. Gehrhardt, pag. 95.

(2) Ibid., pag. 93.

(3) *Hist. des math.*, nouv. éd., II, Paris, an. VII, pag. 92: « Son nom a resté dans l'oubli et il l'a merité ». Ha quindi parimenti torto il Riccardi il quale dice nella sua *Bibl. Mathematica*: « collochiamo quest'opera fra le molte nelle quali si ebbe la sven- « tura di scoprire la quadratura del circolo ».

(4) *Circolo*, pag. 1.

(5) Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1655; *Opera Omnia*, Oxford, 1695, volume 1, pp. 458-466. Gli enunciati di Wallis sono abbastanza oscuri. Eccone uno: « $M\left(1\middle|\frac{3}{2}\right)$ « significet terminum medium inter 1 et $\frac{3}{2}$ in progressione hypergeometrica decrescente

$$1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \text{ etc. } \left(\text{continue multiplicando } 1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4} \text{ etc.}\right).$$

della difficoltà della lettura (il libro del Wallis non fu capito in Francia dal sommo Fermat), il Mengoli ricostruì da sè, più che non lesse, la lunga serie di dimostrazioni che lo condussero al risultato:

« Il quadrato all' inscritto circolo è minore che non è il prodotto di « un numero dispari, per tutti li quadrati de' numeri precedenti dispari, in « riguardo al prodotto del primo par che è il binario, per tutti li qua- « drati de gli altri numeri precedenti pari ».

« Il quadrato all' inscritto circolo è maggiore che non è il prodotto « da tutti i quadrati de' numeri dispari, presi sino ad un qualche pari, in « riguardo al prodotto da quest'ultimo pare, che è il binario, per tutti li « quadrati de gli altri numeri pari precedenti ».

Il metodo del Mengoli, come quello del Wallis, consiste nel calcolare per *interpolazione* l' $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$, considerandolo come termine medio tra gli integrali binomii $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, dove $m$, $n$ sono interi positivi.

Vedremo in una prossima Nota come al Mengoli si debbano altre scoperte, e tra esse quella delle prime serie convergenti per mezzo delle quali è possibile calcolare i logaritmi dei numeri razionali.

## Matematica. — *Sulla condizione Picard-Lauricella per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. È già noto il seguente teorema dimostrato dal Picard [2] per le equazioni integrali di 1ª specie, a funzione caratteristica chiusa, e poi esteso dal Lauricella [3] alle equazioni a nucleo qualunque:

*condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione*

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(st)\,h(t)\,dt \tag{1}$$

---

« Circulus est ad quadratum diametri ut 1 ad $\mathrm{M}\left(1\middle|\frac{3}{2}\right)$ ». Colle nostre notazioni moderne ciò significa:

Si consideri la successione:

$$1 = \int_0^1 dx\ ,\ \frac{2}{3} = \int_0^1 (1-x^2)\,dx\ ,\ \frac{8}{15} = \int_0^1 (1-x^2)^2\,dx\ ,\ \frac{48}{105} = \int_0^1 (1-x^2)^3\,dx\ ,\ldots$$

Il termine medio tra i primi due di questa successione è: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.

[2] Comptes Rendus, 14 juin 1909.

[3] *Sull'equazione integrale di 1ª specie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 3°.