ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

della difficoltà della lettura (il libro del Wallis non fu capito in Francia dal sommo Fermat), il Mengoli ricostruì da sè, più che non lesse, la lunga serie di dimostrazioni che lo condussero al risultato:

« Il quadrato all'inscritto circolo è minore che non è il prodotto di « un numero dispari, per tutti li quadrati de' numeri precedenti dispari, in « riguardo al prodotto del primo par che è il binario, per tutti li qua- « drati de gli altri numeri precedenti pari ».

« Il quadrato all'inscritto circolo è maggiore che non è il prodotto « da tutti i quadrati de' numeri dispari, presi sino ad un qualche pari, in « riguardo al prodotto da quest'ultimo pare, che è il binario, per tutti li « quadrati de gli altri numeri pari precedenti ».

Il metodo del Mengoli, come quello del Wallis, consiste nel calcolare per *interpolazione* l' $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$, considerandolo come termine medio tra gli integrali binomii $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, dove m, n sono interi positivi.

Vedremo in una prossima Nota come al Mengoli si debbano altre scoperte, e tra esse quella delle prime serie convergenti per mezzo delle quali è possibile calcolare i logaritmi dei numeri razionali.

Matematica. — *Sulla condizione Picard-Lauricella per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. È già noto il seguente teorema dimostrato dal Picard [2] per le equazioni integrali di 1ª specie, a funzione caratteristica chiusa, e poi esteso dal Lauricella [3] alle equazioni a nucleo qualunque:

condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(st)\, h(t)\, dt \tag{1}$$

« Circulus est ad quadratum diametri ut 1 ad $\mathrm{M}\left(1\middle|\frac{3}{2}\right)$ ». Colle nostre notazioni moderne ciò significa:

Si consideri la successione:

$$1 = \int_0^1 dx\ ,\ \frac{2}{3} = \int_0^1 (1-x^2)\,dx\ ,\ \frac{8}{15} = \int_0^1 (1-x^2)^2\,dx\ ,\ \frac{48}{105} = \int_0^1 (1-x^2)^3\,dx\ ,\ldots$$

Il termine medio tra i primi due di questa successione è: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1915.

(2) Comptes Rendus, 14 juin 1909.

(3) *Sull'equazione integrale di 1ª specie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 3°.

ammetta soluzione, è che sia convergente la serie

$$\sum_\nu \lambda_\nu^2 d_\nu^2 = \sum_\nu \lambda_\nu^2 \left\{ \int_a^b \varphi_\nu(r)\, g(r)\, dr \right\}^2 ,$$

e che la $g(s)$ *abbia la forma*

$$g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b \varphi_\nu(r)\, g(r)\, dr = \sum_\nu d_\nu\, \varphi_\nu(s).$$

In tre Note (¹) precedenti, apparse in questi Rendiconti, ho considerato dei casi particolari, stabilendo per essi delle condizioni necessarie e sufficienti, indipendentemente dalla conoscenza degli autovalori del nucleo e delle relative autofunzioni, senza però riuscire a stabilire una condizione analoga pel caso generale.

Qui invece, servendomi di alcuni risultati ottenuti in una Nota precedente (²), mi propongo di trasformare la condizione Picard-Lauricella, rendendola indipendente dalla conoscenza degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni del nucleo dell'equazione data, che supporremo simmetrico.

2. Siano λ_ν gli autovalori, e $\varphi_\nu(s)$ le corrispondenti autofunzioni del nucleo simmetrico $K(st)$, che, per maggior generalità, supporremo esser tale che, se ammette l'autovalore λ, ammetta anche l'altro $-\lambda$.

In una Nota precedente (³), abbiamo dimostrato che il nucleo

$$H_1(st) = \lim_{n=\infty} \frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}$$

non può ammettere autovalori diversi da $\lambda_1 = + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $\lambda_2 = - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$; e che, di fronte ad essi, si comporta come $K(st)$. Come conseguenza, abbiamo visto che

$$H_1(st) = \sum_{r=1}^{p_1} \frac{\varphi_1^{(r)}(s)\, \varphi_1^{(r)}(t)}{\lambda_1} + \sum_{r=1}^{p_2} \frac{\varphi_2^{(r)}(s)\, \varphi_2^{(r)}(t)}{\lambda_2} ;$$

dove p_1 e p_2 indicano il numero delle autofunzioni normalizzate e linearmente indipendenti, relative agli autovalori λ_1 e λ_2 rispettivamente.

(¹) Vergerio, *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (seduta dell'8 novembre 1914); *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie* (seduta del 6 giugno 1915); *Sulla risolubilità dell'equazione integrale di 1ª specie*, vol. XXIV, fasc. 3, 2° sem.

(²) Vergerio, *Gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei simmetrici*, Rendiconti dei Lincei, vol. XXIV, fasc. 7, 2° sem.

(³) Ved. l'ultima delle mie Note citate, §§ 2 e 3.

In modo perfettamente analogo, ripetendo, pel nuovo nucleo simmetrico

$$F^{(2)}(st) = K(st) - H_1(st),$$

le considerazioni fatte per $K(st)$, si arriverebbe a dimostrare che il nucleo

$$H_1^{(2)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F^{(2)}_{2n+1}(st)}{\Gamma_2^n}$$

non può ammettere autovalori diversi da $\lambda_3 = +\frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}$, $\lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}}$; e che

$$H_1^{(2)}(st) = \sum_{r=1}^{p_3} \frac{\varphi_3^{(r)}(s)\,\varphi_3^{(r)}(t)}{\lambda_3} + \sum_{r=1}^{p_4} \frac{\varphi_4^{(r)}(s)\,\varphi_4^{(r)}(t)}{\lambda_4}.$$

Ad analoghi risultati si perverrebbe ripetendo il ragionamento per il nucleo

$$F^{(3)}(st) = F^{(2)}(st) - H^{(2)}(st);$$

e così di seguito.

In generale, si dimostrerebbe che gli autovalori del nucleo

$$H_1^{(\nu)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F^{(\nu)}_{2n+1}(st)}{\Gamma_\nu^n},$$

dove

$$F^{(\nu)}(st) = F^{(\nu-1)}(st) - H_1^{(\nu-1)}(st).$$

non possono essere diversi da $\lambda_{2\nu-1} = +\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$ e $\lambda_{2\nu} = -\frac{1}{\sqrt{\Gamma_\nu}}$; ed inoltre che

$$H_1^{(\nu)}(st) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \frac{\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu-1}} + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \frac{\varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu}}. \tag{2}$$

3. Osserviamo che, posto

$$H^{(\nu)}(st) = \lim_{n=\infty} \frac{F^{(\nu)}_{2n}(st)}{\Gamma_\nu^n},$$

si ha

$$\int_a^b H_1^{(\nu)}(sr)\,H_1^{(\nu)}(rt)\,dr = \lim_{n=\infty} \int_a^b \frac{F^{(\nu)}_{2n+1}(sr)}{\Gamma_\nu^n} \frac{F^{(\nu)}_{2n+1}(rt)}{\Gamma_\nu^n}\,dr =$$

$$= \Gamma_\nu \lim_{n=\infty} \frac{F^{(\nu)}_{4n+2}(st)}{\Gamma_\nu^{2n+1}} = \Gamma_\nu\, H^{(\nu)}(st);$$

mutando quindi, nella (2), s in r ed integrando, dopo averne moltiplicati i membri per $H_1(sr)\,dr$, si avrà

$$\Gamma_\nu\, H^{(\nu)}(st) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \frac{\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu-1}^2} + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \frac{\varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu}^{(r)}(t)}{\lambda_{2\nu}^2}\,;$$

ed ancora, essendo

$$\lambda_{2\nu-1}^2\,\Gamma_\nu = \lambda_{2\nu}^2\,\Gamma_\nu = 1\,, \tag{3}$$

avremo

$$H^{(\nu)}(st) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu-1}^{(r)}(t) + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\,\varphi_{2\nu}^{(r)}(t)\,. \tag{4}$$

Si moltiplichino ambo i membri di quest'ultima per $g(s)\,g(t)\,ds\,dt$, e si eseguisca la doppia integrazione: posto

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b H^{(\nu)}(st)\,g(t)\,dt = G^{(\nu)}(s)\,, \\ &\int_a^b \varphi_\nu(s)\,g(s)\,ds = d_\nu\,, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

si ottiene

$$\int_a^b G^{(\nu)}(s)\,g(s)\,ds = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} [d_{2\nu-1}^{(r)}]^2 + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} [d_{2\nu}^{(r)}]^2\,;$$

ed anche ricordando la (3),

$$\frac{1}{\Gamma_\nu}\int_a^b G^{(\nu)}(s)\,g(s)\,ds = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \lambda_{2\nu-1}^2 (d_{2\nu-1}^{(r)})^2 + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \lambda_{2\nu}^2 (d_{2\nu}^{(r)})^2\,;$$

sarà quindi

$$\sum_\nu \frac{1}{\Gamma_\nu}\int_a^b G^{(\nu)}(s)\,g(s)\,ds = \sum_\nu \lambda_\nu^2\,d_\nu^2\,.$$

E poichè

$$\int_a^b [G^{(\nu)}(s)]^2\,ds = \int_a^b G^{(\nu)}(s)\,ds \int_a^b H^{(\nu)}(st)\,g(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b G^{(\nu)}(t)\,g(t)\,dt = D_\nu\,,$$

come si vede subito integrando la (5), dopo averne moltiplicati i membri per $H^{(\nu)}(rs)\,ds$, ed osservando che

$$\int_a^b H^{(\nu)}(rs)\,H^{(\nu)}(st)\,ds = H^{(\nu)}(rt),$$

avremo infine

$$\sum_\nu \frac{D_\nu}{\Gamma_\nu} = \sum_\nu \lambda_\nu^2\,d_\nu^2\,. \tag{6}$$

Appresso, moltiplicando i membri della (4) per $g(t)\,dt$ ed integrando, si ottiene

$$G^{(\nu)}(s) = \sum_{r=1}^{p_{2\nu-1}} \varphi_{2\nu-1}^{(r)}(s)\,d_{2\nu-1}^{(r)} + \sum_{r=1}^{p_{2\nu}} \varphi_{2\nu}^{(r)}(s)\,d_{2\nu}^{(r)}\,;$$

e quindi

$$\sum_\nu G^{(\nu)}(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s)\,d_\nu\,. \tag{7}$$

Per le (6) e (7) possiamo quindi affermare che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione* (1), *a nucleo simmetrico, ammetta soluzione, è che sia convergente la serie*

$$\sum_\nu \frac{D_\nu}{\Gamma_\nu} = \sum_\nu \frac{1}{\Gamma_\nu}\int_a^b \{G^{(\nu)}(s)\}^2\,ds\,;$$

e che la $g(s)$ *si possa mettere sotto la forma*

$$g(s) = \sum_\nu G^{(\nu)}(s)\,. \tag{7'}$$

4. Nel caso che le costanti γ_n di $K(st)$ siano tutte eguali tra loro, essendo

$$F^{(2)}(st) = F^{(3)}(st) = \cdots = 0\,,$$

e quindi

$$G^{(\nu)}(s) = 0 \qquad (\nu > 1)$$

la (7') diventa

$$g(s) = G^{(1)}(s) = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}\,g(t)\,dt =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{1}{\gamma}\int_a^b K_2(sr)\,dr \int_a^b \frac{K_{2n-2}(rt)}{\gamma^{n-1}}\,g(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int_a^b K_2(sr)\,G^{(1)}(r)\,dr = \frac{g_2(s)}{\gamma}\,;$$

che è la condizione già nota [1].

5. Posto ora

$$\int_a^b H_1^{(\nu)}(st)\,g(t)\,dt = G_1^{(\nu)}(s)\,,$$

[1] Ved. la prima delle mie Note citate.

si ha

(8) $$G^{(\nu)}(s) = \int_a^b H^{(\nu)}(st)\, g(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b F^{(\nu)}(sr)\, dr \int_a^b H_1^{(\nu)}(rt)\, g(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b F^{(\nu)}(sr)\, G_1^{(\nu)}(r)\, dr .$$

Inoltre, essendo

$$\int_a^b H_1^{(\nu)}(sr)\, H_1^{(\mu)}(rt)\, dr = 0$$

per ogni $\mu \neq \nu$, perchè le autofunzioni, mediante le quali si può esprimere $H_1^{(\nu)}(sr)$, sono ortogonali a quelle che servono a rappresentare $H_1^{(\mu)}(rt)$, sarà anche

$$\int_a^b H_1^{(\mu)}(rt)\, G_1^{(\nu)}(t)\, dt = 0 \qquad (\mu \neq \nu).$$

E poichè

$$F^{(\nu)}(sr) = K(sr) - H_1^{(1)}(sr) - H_1^{(2)}(sr) - \cdots - H_1^{(\nu-1)}(sr) ,$$

la (8) assumerà la forma

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{1}{\Gamma_\nu} \int_a^b K(sr)\, G_1^{(\nu)}(r)\, dr .$$

Potendo, con ciò, la (7') scriversi

$$g(s) = \int_a^b K(st) \sum_\nu \frac{G_1^{(\nu)}(t)}{\Gamma_\nu}\, dt ,$$

una soluzione della (1) sarà data da

$$h(t) = \sum_\nu \frac{G_1^{(\nu)}(t)}{\Gamma_\nu} .$$

6. Il caso in cui il nucleo della (1) non sia simmetrico si riconduce subito a quello ora considerato, ricordando [1] che l'*equazione integrale* (1) *a nucleo non simmetrico, equivale sempre all'equazione integrale a nucleo simmetrico*

$$g'(s) = \int_a^b \mathrm{K}(st)\, h(t)\, dt ,$$

dove

$$g'(s) = \int_a^b K(rs)\, g(r)\, dr \quad , \quad \mathrm{K}(st) = \int_a^b K(rs)\, K(rt)\, dr .$$

[1] Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, sed. del 23 aprile 1911.

7. Noteremo, da ultimo, che, se la serie

$$\sum_\nu H_1^{(\nu)}(st)$$

è uniformemente convergente, dovrà necessariamente aversi

$$K(st) = \sum_\nu H_1^{(\nu)}(st) \,. \tag{9}$$

Basta infatti notare che, per la (2),

$$\sum_\nu H_1^{(\nu)}(st) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\,,$$

e ricordare un noto teorema dimostrato dallo Schmidt [1].

In particolare, la (9) sarà sempre valida se il suo secondo membro si riduce alla somma d'un numero finito di termini; il che accadrà quando il numero degli autovalori λ_ν, di $K(st)$, è finito.

Matematica. — *Sul concetto di gruppo di monodromia per una funzione ad infiniti valori*. Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili*. Nota di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Fisica. — *Sulla legge di Lo Surdo*. Nota del dott. CARLO SONAGLIA, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener*. Inaugural Dissertation, Göttingen, 1905, § 8.