# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXIV.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica. — *Sullo schiacciamento polare di Nettuno*. Nota del Corrisp. E. Almansi.

1. Il movimento del satellite di Nettuno presenta delle perturbazioni che il Tisserand (*Mécanique céleste*, IV, pag. 141) attribuisce alla forma ellissoidica del pianeta [1].

Ammettendo che questa sia la *sola* causa delle perturbazioni del satellite, io tento qui una determinazione dello schiacciamento polare di Nettuno.

Siccome, a conseguire tale scopo, non è sufficiente la conoscenza delle perturbazioni del satellite, mi valgo ancora di una formula empirica, esprimente una relazione che sembra sussistere, per i pianeti, fra la densità media, lo schiacciamento, e la durata della rotazione.

Darò da prima questa formula, o piuttosto mostrerò per qual via si può esser condotti a stabilirla, riferendosi alla ipotesi della origine fluida dei pianeti.

2. Consideriamo una sfera fluida, le cui particelle si attraggano secondo la legge di Newton, in equilibrio. La densità sia funzione soltanto della distanza dal centro. Supponiamo di imprimere alla sfera un moto uniforme di rotazione, con velocità angolare $\omega$, intorno ad un asse passante per il suo centro. Se il valore di $\omega$ è sufficientemente piccolo, la superficie della sfera assume una forma che differisce pochissimo da quella di un ellissoide di rivoluzione, il cui schiacciamento è piccolo dello stesso ordine di $\omega^2$.

Indichiamo con $\mu$ la densità media della sfera, con A l'inversa dello schiacciamento, con T la durata di una rotazione, ossia $\frac{2\pi}{\omega}$; e poniamo:

$$A = c\mu T^2 . \tag{1}$$

Abbiansi ora quante sfere si voglia, di raggi e masse arbitrarie, ma nelle quali le distribuzioni delle masse siano *simili*. Con questo intendiamo che, detto R il raggio di una delle sfere, di densità media $\mu$, $\varrho$ la densità nei punti che distano di $r$ dal suo centro, e posto

$$\varrho = \mu \, F\left(\frac{r}{R}\right),$$

la funzione F sia la stessa per tutte. Supponiamo di imprimere alle sfere

[1] La causa probabile delle perturbazioni del satellite di Nettuno forma oggetto di ricerche da parte del chmo prof. Armellini. Vedasi in questi Rendiconti (vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 6°) una sua Nota preliminare, ove sono accuratamente raccolti i risultati delle più importanti osservazioni fino ad ora eseguite e discusse.

velocità di rotazione pure arbitrarie (ma piccolissime). Trascurando le potenze dello schiacciamento superiori alla prima, si dimostra che il coefficiente $c$ ha lo stesso valore per tutte le sfere.

Nel caso dei pianeti il coefficiente $c$ varia dall'uno all'altro, benchè il suo valore non subisca variazioni molto grandi. Dobbiamo pertanto ritenere che le masse dei pianeti non siano distribuite in modo simile. Esaminiamo i valori di $c$, mettendoli in relazione con quelli della densità media $\mu$. *Vedremo allora che c è tanto più grande, quanto più piccola è la densità media.* Se infatti si pone

$$c = c_1 + \frac{c_2}{\mu}, \tag{2}$$

quindi

$$A = (c_1 \mu + c_2)\, T^2,$$

si possono attribuire a $c_1$ e $c_2$ valori positivi, uguali per tutti i pianeti, e tali che la formula precedente fornisca, per le inverse degli schiacciamenti, valori che non siano in disaccordo con quanto ci è noto dalle osservazioni.

Assumendo uguale ad 1 la densità media della Terra, e l'ora di tempo solare medio come unità di tempo, dobbiamo porre

$$c_1 = 0{,}49 \quad , \quad c_2 = 0{,}032 ,$$

onde avremo la formula

$$A = (0{,}49\, \mu + 0{,}032)\, T^2 \tag{3}$$

che è appunto quella di cui farò uso.

Nella tabella seguente sono riportati, per la Terra, per Marte, per Giove e per Saturno, i valori di $\mu$, di T, e della inversa dello schiacciamento quale risulta dalla formula (3) (A) e dalle osservazioni ($A_0$) [1].

| | Terra | Marte | Giove | Saturno |
|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | 1 | 0,69 | 0,25 | 0,13 |
| T | 23,93 | 24,62 | 9,88 | 10,23 |
| A | 299 | 224 | 15,1 | 10 |
| $A_0$ | 298 | 200? | 15 | 10 |

Notiamo, quanto a Marte, che il valore 200, attribuito ad $A_0$, è molto incerto. Alcune osservazioni hanno dato, per l'inversa dello schiacciamento, un valore notevolmente maggiore.

[1] I valori di $\mu$, T, $A_0$ sono ricavati dall'*Annuaire du bureau des longitudes*, a. 1915. Solo per la Terra al valore $A_0 = 293$ ho sostituito il valore $A_0 = 298$ che si accorda meglio colle più recenti osservazioni.

Per Urano ($\mu = 0{,}23$) dalle osservazioni dello Schiaparelli A risulterebbe compreso fra 11 e 13. Supponendo $A = 12$, la formula (3) darebbe circa 9 ore come durata della rotazione.

Rispetto a Mercurio e a Venere le opinioni degli astronomi, come è noto, non sono concordi. Mentre da alcuni si attribuisce a T un valore poco diverso da 24, altri ritengono che la durata della rotazione sia di gran lunga maggiore: precisamente uguale alla durata della rivoluzione siderale (Schiaparelli). Se fosse $T = 24$, essendo rispettivamente, per i due pianeti, $\mu = 1{,}1$ e $\mu = 0{,}91$, si avrebbe, dalla formula (3),

$$\text{per Mercurio: } A = 330\,;$$

$$\text{per Venere: } A = 275\,.$$

A valori di T maggiori di 24 corrisponderebbero valori maggiori per A, quindi valori *minori* per gli schiacciamenti.

Nessuno di questi risultati è, in sostanza, confermato o contradetto dalle osservazioni. All'osservazione Mercurio e Venere appariscono sferici: ma è da notare che in Mercurio nemmeno uno schiacciamento di $\frac{1}{330}$ sarebbe visibile; e del pari invisibile sarebbe probabilmente uno schiacciamento di Venere uguale ad $\frac{1}{275}$. Non volendo ammettere in Venere uno schiacciamento di questo ordine di grandezza, la formula (3) porterebbe ad escludere l'ipotesi della rotazione rapida.

Applicata al Sole, la formula (3) dà, in accordo colle osservazioni, uno schiacciamento inapprezzabile: circa $\frac{1}{60000}$.

Per Nettuno, ritenendo $\mu = 0{,}22$, si ha, dalla formula (2)

$$c = 0{,}635\,,$$

valore che adotterremo.

3. Siano $f$ la costante dell'attrazione, M la massa del pianeta, $a$ il suo raggio equatoriale, $r$ la distanza di un punto qualunque P dal centro O del pianeta, $\varphi$ l'angolo che OP forma col suo piano equatoriale.

Il potenziale del pianeta, arrestando al 2° termine il noto sviluppo in serie di funzioni sferiche, potremo rappresentarlo colla formula

$$\text{(4)} \qquad V = f\mathrm{M}\left\{\frac{1}{r} + \frac{ka^2}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \operatorname{sen}^2\varphi\right)\right\},$$

ove $k$ è una costante.

Esiste una relazione che lega $k$, A e il rapporto

$$\lambda = \frac{a\omega^2}{g}$$

tra la forza centrifuga e la gravità sull'equatore del pianeta. Si ha precisamente

(5) $$k = \frac{1}{A} - \frac{\lambda}{2}.$$

Trascurando una quantità piccola d'ordine superiore ad $\omega^2$, nella espressione di $\lambda$ potremo ritenere

$$g = \frac{fM}{a^2} \quad , \quad M = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu ;$$

osservando, poi, che $\omega = \frac{2\pi}{T}$, e denotando con $c_0$ la costante $\frac{2f}{3\pi}$, avremo:

(6) $$\lambda = \frac{2}{c_0 \mu T^2}.$$

Onde la formula (5) potrà scriversi:

(7) $$\frac{1}{A} - \frac{1}{c_0 \mu T^2} = k.$$

Se l'esame delle perturbazioni del satellite ci permetterà di determinare il valore di $k$, quest'ultima equazione, insieme con la

$$A = c\mu T^2 \qquad (c = 0{,}635),$$

ci darà dei valori *probabili* per le due incognite A e T.

Nella equazione (7), a $\mu T^2$ sostituiamo $\frac{A}{c}$. Avremo

$$\frac{1}{A}\left(1 - \frac{c}{c_0}\right) = k,$$

quindi

(8) $$A = \frac{h}{k},$$

ove

(9) $$h = 1 - \frac{c}{c_0}.$$

Il valore della costante $c_0$ possiamo ricavarlo dalla formula (6) applicata alla Terra ($\mu = 1$ ; $\lambda = 0{,}003468$). Troveremo $c_0 = 1{,}0067$. Avendo supposto, per Nettuno, $c = 0{,}635$, la formula (9) darà, per questo pianeta

$$h = 0{,}37.$$

Il Tisserand (*Méc. cél.*, IV, pag. 147), riferendosi ai valori di $h$ per Giove e per Saturno, suppone che per Nettuno sia $h = 0{,}3$ [1]. Sembra più giustificato il valore che noi abbiamo attribuito ad $h$, deducendolo, mediante la (9), dalla formula (2), che riposa sopra osservazioni risguardanti un maggior numero di pianeti [2].

4. Vogliamo far vedere, prima di andar più oltre, come la formula (2), e conseguentemente la (3), corrisponda ad un'ipotesi, assai semplice, sulla distribuzione delle masse nei pianeti.

Riprendiamo l'espressione del potenziale V, che scriveremo

$$V = fM \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{3} ka^2 \chi \right\},$$

ponendo

$$\chi = \frac{1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi}{r^3}.$$

Introduciamo la quantità $m$ definita dalla formula

$$k = \frac{3}{5} \frac{M - m}{M} \frac{1}{A}. \tag{10}$$

Avremo allora

$$V = fM \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{5} \frac{M - m}{M} \frac{1}{A} a^2 \chi \right\},$$

ovvero

$$V = V_1 + V_2,$$

essendo

$$V_1 = \frac{fm}{r}, \quad V_2 = f(M - m) \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{5A} a^2 \chi \right\}.$$

Ora, $V_1$ è il potenziale di una massa $m$ situata nel centro del pianeta; $V_2$ $\left(\text{a meno di termini contenenti le potenze superiori dello schiacciamento } \frac{1}{A}\right)$ è il potenziale di una massa $M - m$ distribuita uniformemente nello spazio occupato dal pianeta stesso. Possiamo dunque dire che, nel grado di appros-

[1] Come apparisce dalle formule (5) e (8), dalle quali, posto $\sigma = \frac{1}{A}$, si ha

$$h = \frac{\sigma - \frac{1}{2}\lambda}{\sigma},$$

il nostro $h$ è il rapporto $\dfrac{k - \frac{1}{2}k_1}{k}$ del Tisserand.

[2] D'altronde, per Giove, i valori qui adottati per $\mu$, T ed A portano ad attribuire ad $h$, non il valore 0,27 del Tisserand, ma il valore 0,38.

simazione a cui ci atteniamo, l'azione esercitata dal pianeta (nello spazio esterno) è quella stessa a cui darebbero luogo una massa $m$ posta nel suo centro, ed una massa $M - m$ distribuita uniformemente nello spazio che esso occupa.

La massa $m$ potremo chiamarla *nucleo* del pianeta. Si tratta evidentemente di un nucleo ideale: ma l'avere il rapporto $\frac{m}{M}$ un valore più o meno grande. ci fornisce tuttavia un' indicazione sull'essere più o meno condensata verso il centro la massa totale M.

Moltiplicando l'equazione (10) per A; osservando, poi, che il prodotto $k$A è uguale, per la formula (8), ad $h$, e, per la (9), ad $1 - \frac{c}{c_0}$, abbiamo:

$$\frac{3}{5}\frac{M - m}{M} = 1 - \frac{c}{c_0},$$

da cui

(11) $$\frac{m}{M} = \frac{5}{3}\frac{c}{c_0} - \frac{2}{3}.$$

Questa relazione fra il rapporto $\frac{m}{M}$ e il coefficiente $c$ — relazione ottenuta senza tener conto della nostra formula (2) — fa conoscere il valore del nucleo per quei pianeti per cui è noto $c$: ossia, in virtù della formula (1), per quei pianeti pei quali si conoscono lo schiacciamento e la durata della rotazione.

Ponendo la condizione che il nucleo sia positivo, e minore della massa totale M, essa relazione fornisce due limiti (già stabiliti per altra via dal Clairaut) fra i quali deve essere compreso il valore di $c$. Siccome $c_0$ differisce poco da 1, i due limiti saranno approssimativamente 0,4 ed 1.

Supponiamo, ora, che sussista la relazione (2) fra $c$ e $\mu$. E notiamo che $c$ risulta compreso, per tutti i pianeti, fra i limiti assegnati: esso è minimo per Mercurio ($c = 0{,}52$), massimo per Saturno ($c = 0{,}74$). La formula (11), tenendo conto della (2), darà

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{5}{3}\frac{c_1}{c_0} - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3}\frac{c_2}{c_0}\cdot\frac{1}{\mu},$$

ossia

(12) $$\frac{m}{M} = q_1 + \frac{q_2}{\mu},$$

ove $q_1$ e $q_2$ denotano due costanti. Calcolando i loro valori numerici, troveremo

$$q_1 = 0{,}145 \quad , \quad q_2 = 0{,}053 .$$

Ammettere la formula (2) equivale dunque ad ammettere la (12): ad ammettere, quindi, che, nei pianeti, *quanto minore è la densità media, tanto più la massa è condensata verso il centro*. L'avere un pianeta una piccola densità media, dipenderebbe dunque, in special modo, dall'essere poco densi gli strati più vicini alla superficie.

I valori estremi del rapporto $\frac{m}{M}$ fra il nucleo e la massa totale sarebbero 0,19 (Mercurio), e 0,55 (Saturno). Per la Terra si ha $\frac{m}{M}=0{,}2$; per Giove $\frac{m}{M}=0{,}36$ [1].

5. Abbiamo posto $A=\frac{h}{k}$, e supposto per Nettuno $h=0{,}37$. Un'espressione di $k$, in funzione di elementi che dovranno essere forniti dalle osservazioni, possiamo ottenerla nel modo seguente:

Poniamo nel centro O del pianeta l'origine di una terna di assi ortogonali $Oxyz$, assumendo l'equatore del pianeta come piano $z=0$. Nella formula (4) potremo porre $\operatorname{sen}\varphi=\frac{z}{r}$. Supporremo poi uguale ad 1 il raggio equatoriale $a$. Onde avremo

$$V=fM\left\{\frac{1}{r}+k\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{z^2}{r^5}\right)\right\}. \tag{13}$$

Dalle equazioni del movimento del satellite (ottenute considerando il pianeta come fisso), $x''=\frac{\partial V}{\partial x}$, ecc., si deduce:

$$yz''-zy''=y\frac{\partial V}{\partial z}-z\frac{\partial V}{\partial y}, \text{ ecc.}$$

Poniamo

$$G=yz'-zy' \quad , \quad H=zx'-xz' \quad , \quad K=xy'-yx'. \tag{14}$$

Sarà

$$\frac{dG}{dt}=y\frac{\partial V}{\partial z}-z\frac{\partial V}{\partial y}, \text{ ecc.} \tag{15}$$

Ora, dalla formula (13) si ha:

$$y\frac{\partial V}{\partial z}-z\frac{\partial V}{\partial y}=-2kfM\frac{yz}{r^5},$$

$$z\frac{\partial V}{\partial x}-x\frac{\partial V}{\partial z}=\quad 2kfM\frac{xz}{r^5},$$

$$x\frac{\partial V}{\partial y}-y\frac{\partial V}{\partial x}=0;$$

[1] Cfr. Tisserand, *Méc. cél*, II, pag. 205: « *pour la Terre..... la condensation vers le centre est moins prononcée que pour Jupiter et surtout pour Saturne* ».

quindi, sostituendo nelle (15), integrando fra 0 e $t$, e chiamando $G_0, H_0, K_0$ i valori iniziali di $G, H, K$, avremo:

$$G = G_0 - 2kfM \int_0^t \frac{yz}{r^5}\, dt,$$

$$H = H_0 + 2kfM \int_0^t \frac{xz}{r^5}\, dt,$$

$$K = K_0 .$$

A causa del fattore $k$ (che è piccolo dello stesso ordine di $\omega^2$), per un valore di $t$ non troppo grande potremo calcolare gl'integrali del secondo membro come se il movimento del satellite non fosse perturbato, e la sua orbita (che ha d'altronde un'eccentricità piccolissima) fosse circolare: ossia come se la distanza $r$ del satellite dal centro del pianeta fosse costante, e pure costante fosse la sua velocità $v$. Poniamo $ds = v\,dt$; $t$ rappresenti la durata di una rivoluzione del satellite. Avremo:

$$G = G_0 - \frac{2kfM}{r^5 v} \int_0^{2\pi r} yz\, ds,$$

$$H = H_0 + \frac{2kfM}{r^5 v} \int_0^{2\pi r} xz\, ds,$$

$$K = K_0,$$

gli integrali essendo estesi ad un circolo che ha il centro nel centro del pianeta, e giace sul piano dell'orbita relativo all'istante iniziale.

Fissiamo ora l'asse delle $x$: sia esso l'intersezione del detto piano col piano equatoriale di Nettuno ($z = 0$). Il secondo integrale è allora nullo; mentre, detto $i$ l'angolo acuto formato dai due piani, il primo è uguale, come si verifica facilmente, a $\pi r^3 \operatorname{sen} i \cos i$. Onde le formule precedenti diverranno:

$$(16) \qquad \begin{cases} G = G_0 - \dfrac{\pi k f M}{r^2 v} \operatorname{sen} 2i, \\ H = H_0, \\ K = K_0 . \end{cases}$$

Osserviamo che $G, H, K$, per le formule (14), sono proporzionali ai coseni direttori della normale, che diremo $O\zeta$, al piano dell'orbita. Posto $Q^2 = G^2 + H^2 + K^2$, i coseni stessi, al tempo $t$, saranno:

$$\alpha = \frac{G}{Q}, \quad \beta = \frac{H}{Q}, \quad \gamma = \frac{K}{Q}.$$

Nell'istante iniziale il piano dell'orbita contiene l'asse delle $x$: quindi sarà $G_0 = 0$. Onde quadrando e sommando le equazioni (16), e trascurando il termine che contiene il fattore $k^2$; avremo $Q^2 = H_0^2 + K_0^2$; dalla qual formula vediamo che Q, al tempo $t$, ha sensibilmente lo stesso valore che nell'istante iniziale. Perciò i valori iniziali di $\alpha, \beta, \gamma$ saranno:

$$\alpha_0 = \frac{G_0}{Q} = 0 \quad , \quad \beta_0 = \frac{H_0}{Q} \quad , \quad \gamma_0 = \frac{K_0}{Q} .$$

E dividendo per Q le formule (16), avremo (a meno di termini piccoli di ordine superiore a $k$)

$$\alpha = -\frac{\pi k f M}{r^2 v Q} \operatorname{sen} 2i ,$$
$$\beta = \beta_0 ,$$
$$\gamma = \gamma_0 .$$

A Q, che compare in un termine contenente il fattore $k$, possiamo sostituire il valore $rv$ (costante delle aree) calcolato trascurando le perturbazioni del satellite e l'ellitticità dell'orbita. Notiamo poi che $\frac{fM}{r^2}$ è uguale a $\frac{v^2}{r}$ (accelerazione del satellite). Sarà, per conseguenza,

$$\alpha = -\frac{\pi k}{r^2} \operatorname{sen} 2i .$$

Diciamo $\psi$ l'angolo compreso fra le due direzioni $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ed $(\alpha, \beta, \gamma)$. Si ha:

$$2(1 - \cos\psi) = (\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 .$$

Nel nostro caso, poichè l'angolo $\psi$ è piccolissimo, potremo ritenere $2(1 - \cos\psi) = \psi^2$. Inoltre $\alpha_0 = \beta - \beta_0 = \gamma - \gamma_0 = 0$. Dunque $\psi$ è uguale al valore assoluto di $\alpha$, ossia — la costante $k$ essendo positiva, come apparisce dalla formula (8) —

$$\psi = \frac{\pi k}{r^2} \operatorname{sen} 2i .$$

Questo è l'angolo descritto dalla normale al piano dell'orbita nel tempo $t$ in cui il satellite compie una rivoluzione (circa $5^g\, 21^o$). Chiamando $\varepsilon$ lo stesso angolo espresso in gradi, avremo:

$$\varepsilon = \frac{180 k}{r^2} \operatorname{sen} 2i . \tag{17}$$

La formula $\gamma = \gamma_0$ ci dice poi che, durante una rivoluzione del satellite, l'angolo formato dall'asse dell'orbita coll'asse del pianeta non varia: ossia che l'inclinazione $i$ è costante.

Conoscendo i valori di $r$, $\varepsilon$ ed $i$, la formula (17) ci darà il valore di $k$ (a meno che non sia $i = 0$, nel qual caso dovrà pure aversi $\varepsilon = 0$).

Se nella formula (8) sostituiamo a $k$ il valore ricavato dalla (17), abbiamo:

$$\text{(18)} \qquad A = \frac{180h}{r^2 \varepsilon} \operatorname{sen} 2i .$$

6. Le osservazioni relative alle variazioni che ha subìto il piano dell'orbita del satellite dal 1850, permettono di determinare l'angolo $\varepsilon$ con sufficiente esattezza. Potremo ritenere

$$\varepsilon = 0^\circ{,}0034 .$$

Avendosi poi, come distanza del satellite dal pianeta,

$$r = 13{,}33 ,$$

ed essendosi supposto $h = 0{,}37$ (§ 3), la formula (18) darà

$$\text{(19)} \qquad A = 110 \operatorname{sen} 2i ;$$

dalla qual formula risulterebbe, intanto, che $A < 110$, ossia che lo schiacciamento di Nettuno è *maggiore* di $\frac{1}{110}$.

Una grande incertezza lasciano invece le osservazioni sul valore della inclinazione $i$.

Il Dyson, calcolando l'angolo $i$ in due modi diversi, trova $i = 22^\circ$ (*Monthly notices*, 1905, pag. 581: $\gamma = 22^\circ$), e $i = 16^\circ$ (ibid., pag. 583). Se adottiamo il valore medio $i = 19^\circ$, avremo, dalla formula (19),

$$A = 68 .$$

Lo schiacciamento di Nettuno sarebbe dunque approssimativamente di $\frac{1}{70}$.

Come durata della rotazione, la formula (3) darebbe circa 22 ore.