ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Fisica matematica. — *Campi elettromagnetici dipendenti da una sola coordinata.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

I.

1. La regione di spazio, in cui il campo si manifesta, possa essere occupata, in parte, da dielettrici e, nell'altra parte, da conduttori omogenei, isotropi. Indichiamo con E_x, E_y, E_z le componenti della forza elettrica; con M_x, M_y, M_z quelle della forza magnetica; con c la velocità di propagazione della luce nel vuoto; con ε e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica; con λ la conducibilità elettrica, le ultime tre costanti avendo, in generale, valori diversi nei diversi dielettrici e conduttori che intervengono nella quistione, ed essendo, in particolare, $\lambda = 0$ nell'interno di ogni dielettrico. Ciò posto, nella ipotesi che nel campo elettromagnetico in discorso non ci sieno da considerare cariche elettriche, nè distribuzioni di masse magnetiche, e che il campo stesso varii soltanto col variare della coordinata x, le equazioni indefinite del campo stesso (equazioni di Maxwell) si riducono a:

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x = 0\,, & &\frac{\partial M_x}{\partial t} = 0\,,\\
-&c\frac{\partial M_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi\lambda E_y\,, & &c\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\frac{\partial M_y}{\partial t}\,,\\
&c\frac{\partial M_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi\lambda E_z\,, & -&c\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu\frac{\partial M_z}{\partial t}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(1')\qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0\,.
$$

Da teoremi noti discende che il sistema delle sei quantità $E_x, E_y, \dots, M_z$ (e, quindi, il campo elettromagnetico stesso) è univocamente determinato ad ogni istante t successivo all'istante iniziale $t = 0$, se le dette sei quantità — oltre a soddisfare alle equazioni (1), (1') nell'interno di ognuno dei dielettrici e conduttori che fanno parte del campo, quando alle costanti che in esse compaiono si attribuiscono i corrispondenti valori — sono tali che le componenti tangenziali delle forze elettrica e magnetica sieno continue anche attraverso le superficie di separazione dei diversi dielettrici e conduttori adiacenti che, nelle ipotesi fatte, non possono essere che dei piani $x = \text{cost.}$; che, per $t = 0$, coincidano col sistema di valori ad esse assegnati nello stato iniziale del campo, e che, infine, soddisfino a certe condizioni ai limiti se il campo è limitato, naturalmente, da uno, o due, piani $x = \text{cost.}$

2. Il problema della determinazione effettiva delle sei quantità E_x, $E_y, \ldots, M_z$ in funzione di x e di t, nelle ipotesi precedentemente fatte, si scinde in tre parti distinte e cioè: 1°) la determinazione di E_x, M_x; 2°) quella di E_y, M_z; 3°) quella di E_z, M_y. Il primo di questi problemi particolari non presenta difficoltà di sorta; mentre gli altri due costituiscono due problemi equivalenti, differendo uno dall'altro per il semplice scambio degli assi y e z. Basterà quindi occuparsi di uno solo di essi (p. es., della determinazione di E_y ed M_z); e, ponendo, per semplicità, $E_y = E$, $M_z = M$, al problema da risolvere può darsi l'enunciato seguente:

Supposto che x varii in un certo intervallo finito, od infinito, I composto di un numero finito di intervalli parziali adiacenti $I_1, I_2, \ldots, I_n$, ciascuno corrispondente a ciascuno dei dielettrici e conduttori omogenei che si suppongono nel campo elettromagnetico che consideriamo; *supposto che t varii nell'intervallo da 0 a $+\infty$; dinotando con $\varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n terne di costanti positive in modo che la terna $\varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i$ corrisponda all'intervallo I_i, determinare le funzioni E ed M di x e t nel campo di variabilità precedente, in modo che:*

1°) *quando x varii in I_i, sieno soddisfatte le equazioni:*

$$\varepsilon_i \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial M}{\partial x} + 4\pi\lambda_i E = 0,$$

$$c \frac{\partial E}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial M}{\partial t} = 0,$$

essendo c un'altra costante positiva;

2°) *sieno continue rispetto a t e rispetto ad x anche per quei valori di x che corrispondono a punti di separazione di due intervalli I_i adiacenti;*

3°) *per $t = 0$ assumano dati valori;*

4°) *se l'intervallo I è finito, supporremo che per i valori di x, che corrispondono ad estremi di questo intervallo, una delle due quantità E ed M si riduca ad una funzione assegnata di t.*

E, dai noti teoremi accennati in principio, discende che il problema precedente è determinato ed ha una sola soluzione.

II.

Integrazione indefinita delle equazioni

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + c \dfrac{\partial M}{\partial x} + 4\pi\lambda E = 0, \\[2mm] c \dfrac{\partial E}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial M}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3. Per raggiungere l'intento nel modo più semplice, conviene, anzitutto, trasformare le (2), ponendo:

$$(3)\qquad E = Ue^{-kt}\ ,\ M = Ve^{-kt}\quad \text{con}\quad k = \frac{2\pi\lambda}{\varepsilon}\,,$$

sicchè le equazioni trasformate in U e V diventano:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{c}{\varepsilon}\dfrac{\partial V}{\partial x} + kU = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{c}{\mu}\dfrac{\partial U}{\partial x} - kV = 0 \end{cases}$$

e formano un sistema di equazioni aggiunto di se stesso. Notiamo, quindi, che, se U, V e φ, ψ sono due sistemi di integrali qualunque delle (4), l'espressione

$$(5)\qquad (\psi U + \varphi V)\,dx - c\left(\frac{1}{\mu}\,\varphi U + \frac{1}{\varepsilon}\,\psi V\right)dt$$

è un differenziale esatto. Perciò, interpretando x e t come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in un piano e supponendo che in una regione di questo piano, almeno, le quattro funzioni U, V, φ, ψ sieno regolari, l'integrale di (5), esteso ad un contorno s chiuso, qualunque, appartenente a questa regione, percorso in un senso arbitrario, è nullo, ossia

$$(6)\qquad \int_s \left\{ (\psi U + \varphi V)\,dx - c\left(\frac{1}{\mu}\,\varphi U + \frac{1}{\varepsilon}\,\psi V\right)dt \right\} = 0\,.$$

4. Nel seguito, con x e t indicheremo le coordinate di un punto fisso O del piano xt, mentre indicheremo con ξ e τ le coordinate di un punto variabile. Ciò posto, possiamo soddisfare alle (4) in due modi diversi, ponendo, per U e V:

$$(7)\qquad \varphi = -\frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\quad ,\quad \psi = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + k\Phi\,,$$

ovvero:

$$(7')\qquad \varphi = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - k\Phi\quad ,\quad \psi = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\,,$$

se, in entrambi i casi, supponiamo:

$$(8)\qquad C^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} + k^2\Phi = 0\quad ,\quad C = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,.$$

Noi ci serviremo, per Φ, come in seguito sarà indicato, di una o dell'altra delle seguenti espressioni:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi = \Phi_1 &= \pm\left[C(\tau - t) - (\xi - x)\right] \frac{I_1\left[\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}\right]}{\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}}\,,\\
\Phi = \Phi_2 &= \quad \left[C(\tau - t) + (\xi - x)\right] \frac{I_1\left[\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}\right]}{\frac{k}{C}\sqrt{C^2(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2}}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

in cui, come al solito,

$$
I_1(z) = \sum_0^\infty{}_i \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2i+1}}{i!(i+1)!}\,.
$$

Possiamo così costruire i seguenti quattro sistemi di soluzioni particolari delle (4):

$$
\begin{aligned}
&1)\qquad \varphi_{11} = -\frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}\quad, \quad \psi_{11} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau} + k\Phi_1\,;\\
&2)\qquad \varphi_{12} = -\frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}\quad, \quad \psi_{12} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\tau} + k\Phi_2\,;\\
&3)\qquad \varphi_{21} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau} - k\Phi_1\quad, \quad \psi_{21} = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}\,;\\
&4)\qquad \varphi_{22} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\tau} - k\Phi_2\quad, \quad \psi_{22} = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi}
\end{aligned}
$$

i quali son tali che, quando in Φ_1 si sceglie il segno $+$,

$$
(10)\quad \left.\left\{
\begin{aligned}
&\varphi_{11} - \varphi_{12} = 2\frac{c}{\varepsilon}\frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)}\quad, \quad \psi_{11} - \psi_{12} = 0\,,\\
&\varphi_{21} - \varphi_{22} = 0\quad, \quad \psi_{21} - \psi_{22} = 2\frac{c}{\mu}\frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)}
\end{aligned}
\right\}\right. \text{per } \xi = x\,;
$$

mentre, quando in Φ_1 si sceglie il segno $-$,

$$
(10')\quad \left.\left\{
\begin{aligned}
&\varphi_{11} - \varphi_{12} = 0\ ,\ \psi_{11} - \psi_{12} = -2C\frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)}\,,\\
&\varphi_{21} - \varphi_{22} = -2C\frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)}\ ,\ \psi_{21} - \psi_{22} = 0
\end{aligned}
\right\}\right. \text{per } \tau = t\,,
$$

dove $\frac{J_1(z)}{z}$ indica la funzione che si ottiene da $\frac{I_1(z)}{z}$ mutando z in $z\sqrt{-1}$.

5. Consideriamo ora la regione σ del piano xt, limitata dalle due caratteristiche del sistema di equazioni (4),

$$C(\tau - t) - (\xi - x) = 0 \quad , \quad C(\tau - t) + (\xi - x) = 0 \, ,$$

uscenti dal punto $O \equiv (x, y)$ e da una linea s aperta e, ordinatamente, regolare.

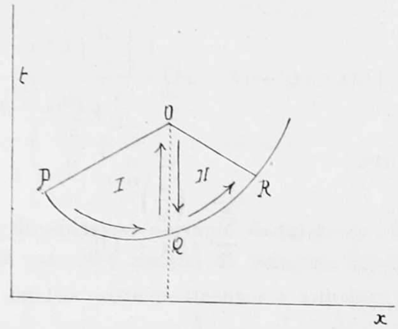

FIG. 1.

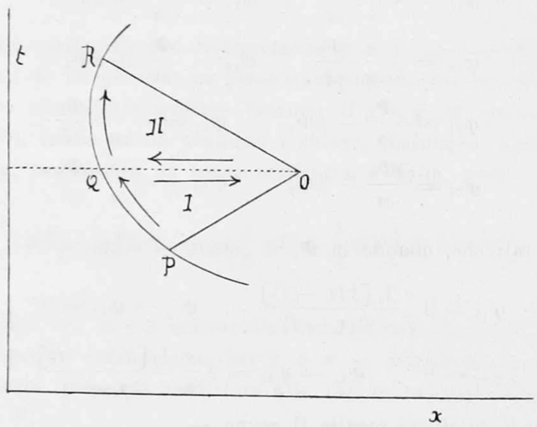

FIG. 1.^{bis}

Rispetto alla regione σ, possono darsi due casi: che essa sia attraversata dalla retta $\xi = x$, ovvero che sia attraversata dalla retta $\tau = t$. Nel primo caso supporremo che la linea s sia incontrata in un punto solo da ogni retta $\xi =$ cost. che l'incontra, a meno che una parte di s stessa appartenga a questa retta; nel secondo caso supporremo che questo accada per ogni retta $\tau =$ cost. che l'incontra. Nel primo caso la retta $\xi = x$, nel secondo la retta $\tau = t$ divide σ in due parti: chiameremo I la regione parziale di σ adiacente alla caratteristica $C(\tau - t) - (\xi - x) = 0$; II l'altra (figg. 1 e 1bis).

Supponiamo dapprima, ora, che σ sia attraversata dalla retta $\xi = x$ (fig. 1), e chiamiamo P, Q, R i punti d'incontro di s con le tre rette $C(\tau - t) - (\xi - x) = 0$, $\xi = x$, e $C(\tau - t) + (\xi - x) = 0$, successivamente. Applichiamo, quindi, in questa ipotesi, la (6) al contorno della regione I e alle due soluzioni delle (4): (U, V) e $(\varphi_{11}, \psi_{11})$, la soluzione (U, V) essendo arbitraria ma regolare almeno in σ. Notando che sulla caratteristica OP, adiacente alla regione I, è $d\xi = C\,d\tau$ e che, perciò, su questa stessa caratteristica

$$(\psi_{11}U + \varphi_{11}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)d\tau =$$
$$= k\Phi_1\left(U d\xi - \frac{c}{\varepsilon}V d\tau\right) + \left(CU - \frac{c}{\varepsilon}V\right)d\Phi_1 = 0\,,$$

si trova subito

$$(11)\qquad \int_P^Q \left\{(\psi_{11}U + \varphi_{11}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)d\tau\right\} -$$
$$- c\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)_{\xi=x} d\tau = 0\,,$$

il primo integrale essendo preso lungo la linea s, e t_0 essendo il valore di τ nel punto Q.

In modo analogo, applicando la (6) al contorno della regione II e alle due soluzioni (U, V), $(\varphi_{12}, \psi_{12})$ delle (4), si trova

$$(11')\qquad \int_Q^R \left\{(\psi_{12}U + \varphi_{12}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right)d\tau\right\} +$$
$$+ c\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right)_{\xi=x} d\tau = 0\,.$$

Se ora, supponendo di aver scelto in Φ_1 il segno +, sommiamo le (11) e (11') e teniamo conto delle (10), si trova

$$(12)\qquad 2C^2\int_{t_0}^{t} U(\tau, x)\,\frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)}\,d\tau =$$
$$= \int_P^Q \left\{(\psi_{11}U + \varphi_{11}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{11}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{11}V\right)d\tau\right\} +$$
$$+ \int_Q^R \left\{(\psi_{12}U + \varphi_{12}V)\,d\xi - c\left(\frac{1}{\mu}\varphi_{12}U + \frac{1}{\varepsilon}\psi_{12}V\right)d\tau\right\}.$$

Lasciando fisse le ipotesi fatte rispetto a σ, e procedendo in modo analogo al precedente, sostituendo soltanto alle due soluzioni $(\varphi_{11}, \psi_{11})$,

$(\varphi_{12}, \psi_{12})$ delle (4), le altre due $(\varphi_{21}, \psi_{21})$, $(\varphi_{22}, \psi_{22})$, rispettivamente, troviamo l'altra formola

$$(13) \quad 2C^2 \int_{t_0}^{t} V(\tau, x) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)} d\tau =$$
$$= \int_P^Q \left\{ (\psi_{21} U + \varphi_{21} V) d\xi - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi_{21} U + \frac{1}{\varepsilon} \psi_{21} V \right) d\tau \right\} +$$
$$+ \int_Q^R \left\{ (\psi_{22} U + \varphi_{22} V) d\xi - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi_{22} U + \frac{1}{\varepsilon} \psi_{22} V \right) d\tau \right\}.$$

Dalle formole (12) e (13) possiamo ricavare i valori di U e V nel punto $0 \equiv (x, t)$ espressi per mezzo dei valori che U e V acquistano sulla sulla linea s fra i punti P ed R, tenendo presente che la soluzione dell'equazione

$$(14) \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)} d\tau = \Phi(t),$$

al quale tipo appartengono le (12) e (13), è data dalla formola

$$(14') \quad \varphi(t) = 2\Phi'(t) - k^2 \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau) \frac{I_1[k(\tau - t)]}{k(\tau - t)} d\tau .$$

6. Consideriamo ora il caso in cui σ è attraversata dalla retta $\tau = t$ (fig. 1[bis]). Indicando, in questo caso, con P, Q, R i punti d'incontro delle rette $C(\tau - t) - (\xi - x) = 0$, $\tau = t$, $C(\tau - t) + (\xi - x) = 0$ con la linea s, successivamente, procedendo in modo analogo a quello del num. precedente, con l'avvertenza, soltanto, di scegliere in Φ_1 il segno — e di tener conto delle (10′), invece che delle (10), si trova:

$$(15) \quad 2C \int_{x_0}^{x} U(t, \xi) \frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)} d\xi =$$
$$= \int_P^Q \left\{ (\psi_{11} U + \varphi_{11} V) d\xi - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi_{11} U + \frac{1}{\varepsilon} \psi_{11} V \right) d\tau \right\} +$$
$$+ \int_Q^R \left\{ (\psi_{12} U + \varphi_{12} V) d\xi - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi_{12} U + \frac{1}{\varepsilon} \psi_{12} V \right) d\tau \right\},$$

$$(16) \quad 2C \int_{x_0}^{x} V(t, \xi) \frac{J_1\left[\frac{k}{C}(\xi - x)\right]}{\frac{k}{C}(\xi - x)} d\xi =$$
$$= \int_P^Q \left\{ (\psi_{21} U + \varphi_{21} V) d\xi - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi_{21} U + \frac{1}{\varepsilon} \psi_{21} V \right) d\tau \right\} +$$
$$+ \int_Q^R \left\{ (\psi_{22} U + \varphi_{22} V) d\xi - c \left(\frac{1}{\mu} \varphi_{22} U + \frac{1}{\varepsilon} \psi_{22} V \right) d\tau \right\}$$

nelle quali x_0 è il valore di x corrispondente al punto Q. E da queste formole, alla stessa guisa che dalle (12) e (13), si possono ricavare i valori di U e V nel punto $O \equiv (x, t)$ per mezzo dei valori che U e V assumono su s fra i punti P e R.

7. Vogliamo ricercare, per finire, come si particolarizzano le nostre formole nell'ipotesi di $\lambda = k = 0$. In questa ipotesi è, intanto, $U = E$, $V = M$; e basta derivare, rapporto a t, le (12) e (13), dopo aver introdotto l'ipotesi $k = 0$, per trovare:

$$(12_1) \qquad E(t, x) = \frac{1}{2C^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q \left(CE + \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi - C\, d\tau) + \right.$$

$$\left. + \int_Q^R \left(CE - \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi + C\, d\tau) \right\},$$

$$(13_1) \qquad M(t, x) = \frac{1}{2C^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q \left(\frac{c}{\mu} E + CM \right) (d\xi - C\, d\tau) - \right.$$

$$\left. - \int_Q^R \left(\frac{c}{\mu} E - CM \right) (d\xi + C\, d\tau) \right\},$$

come basta derivare le (15), (16), nella stessa ipotesi di $k = 0$, rispetto ad x, per trovare:

$$(15_1) \qquad E(t, x) = \frac{1}{2C} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_P^Q \left(CE + \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi - C\, d\tau) + \right.$$

$$\left. + \int_Q^R \left(CE - \frac{c}{\varepsilon} M \right) (d\xi + C\, d\tau) \right\},$$

$$(16_1) \qquad M(t, x) = \frac{1}{2C} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_P^Q \left(\frac{c}{\mu} E + CM \right) (d\xi - C\, d\tau) - \right.$$

$$\left. - \int_Q^R \left(\frac{c}{\mu} E - CM \right) (d\xi + C\, d\tau) \right\}.$$

In modo analogo a quello che si verifica nel caso generale, le due coppie di formole (12_1), (13_1), e (15_1), (16_1) risolvono uno stesso problema: le prime due quando l'arco s, compreso fra i punti P ed R, è incontrato dalla retta $\xi = x$; le altre quando quest'arco è incontrato dalla retta $\tau = t$.

III.

Campo elettromagnetico all'interno di un solo dielettrico, o di due dielettrici adiacenti.

8. Si tratti dapprima del caso, molto semplice, in cui il campo elettromagnetico si manifesta all'interno di un solo dielettrico che si estenda indefinitamente, in tutti i sensi. Se, in questo caso, chiamiamo $f(x)$ ed $F(x)$

i valori che E ed M acquistano per $t = 0$, e supponiamo che questi valori siano noti in tutto l'intervallo di x da $-\infty$ a $+\infty$, le formole (12_1) e (13_1) ci risolvono immediatamente il problema quando assumiamo l'asse x per linea s ed il semipiano $t \geq 0$ per la regione σ in cui cade il punto $0 \equiv (x\,,t)$. Le (12_1), (13_1), in questo caso, diventano:

$$
(17) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{E}(x\,,t) &= \frac{1}{2\mathrm{C}} \Big\{ \mathrm{C}[f(x-\mathrm{C}t) + f(x+\mathrm{C}t)] + \\
&\qquad + \frac{c}{\varepsilon}[\mathrm{F}(x-\mathrm{C}t) - \mathrm{F}(x+\mathrm{C}t)] \Big\}, \\
\mathrm{M}(x\,,t) &= \frac{1}{2\mathrm{C}} \Big\{ \frac{c}{\mu}[f(x-\mathrm{C}t) - f(x+\mathrm{C}t)] + \\
&\qquad + \mathrm{C}[\mathrm{F}(x-\mathrm{C}t) + \mathrm{F}(x+\mathrm{C}t)] \Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

9. Un solo dielettrico occupi, in questo secondo caso, la regione $x \geq 0$ e possa estendersi anche oltre; ma, per una qualunque ragione, dobbiamo limitarci a considerare, in esso, un campo elettromagnetico soltanto nella detta regione $x \geq 0$. Il campo sarà, certamente, determinato ad ogni istante $t > 0$, se conosciamo i valori $f(x)\,,\mathrm{F}(x)$ che E ed M assumono per $t = 0$ e per x variabile fra 0 e $+\infty$, e, inoltre, i valori $\varphi(t)\,,\Phi(t)$ che le stesse quantità assumono per $x = 0$ e per t variabile fra 0 e $+\infty$. Se, infatti, supponiamo che nelle (12_1), (13_1) la linea s sia la linea formata dall'insieme degli assi x e t positivi e che quindi la regione σ si riduca al quadrante positivo del piano xt, dalle dette formole, ricaviamo che, per i punti $0 \equiv (x\,,t)$ per cui $\mathrm{C}t - x \leq 0$, i valori di E ed M sono dati ancora dalle (17), mentre per i punti O, per cui $\mathrm{C}t - x \geq 0$, ricaviamo:

$$
(18) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{E}(x\,,t) &= \frac{1}{2\mathrm{C}} \Big\{ \mathrm{C}\Big[\varphi\Big(t - \frac{x}{\mathrm{C}}\Big) + f(x+\mathrm{C}t)\Big] + \\
&\qquad + \frac{c}{\varepsilon}\Big[\Phi\Big(t - \frac{x}{\mathrm{C}}\Big) - \mathrm{F}(x+\mathrm{C}t)\Big] \Big\}, \\
\mathrm{M}(x\,,t) &= \frac{1}{2\mathrm{C}} \Big\{ \frac{c}{\mu}\Big[\varphi\Big(t - \frac{x}{\mathrm{C}}\Big) - f(x+\mathrm{C}t)\Big] + \\
&\qquad + \mathrm{C}\Big[\Phi\Big(t - \frac{x}{\mathrm{C}}\Big) + \mathrm{F}(x+\mathrm{C}t)\Big] \Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

I valori così ottenuti, per E ed M, tendono, per $t = 0$, ai valori ad essi assegnati sul semiasse x positivo; ma affinchè tendano ai valori φ e Φ ad essi assegnati sul semiasse t positivo, quando x tende a zero, devono essere verificate le relazioni:

$$
(19) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{C}[\varphi(t) - f(\mathrm{C}t)] - \frac{c}{\varepsilon}[\Phi(t) - \mathrm{F}(\mathrm{C}t)] = 0\,, \\
&\frac{c}{\mu}[\varphi(t) - f(\mathrm{C}t)] - \mathrm{C}[\Phi(t) - \mathrm{F}(\mathrm{C}t)] = 0
\end{aligned}
\right.
$$

le quali si riducono ad una sola, potendosi ottenere la seconda dalla prima moltiplicando questa per la costante $\frac{c}{C\mu}$. Perchè il campo sia determinato, come era da attendersi, basta dare tre delle quattro funzioni f, F, φ, Φ, del resto, in modo arbitrario.

10. Il campo elettromagnetico sia ora da considerarsi in tutto lo spazio; e questo sia occupato da due soli dielettrici diversi, separati dal piano $x=0$. Distinguiamo con l'indice 1 le quantità che si riferiscono al dielettrico che occupa la regione $x \geq 0$, e con l'indice 2 le quantità analoghe che si riferiscono al dielettrico che occupa la regione $x \leq 0$.

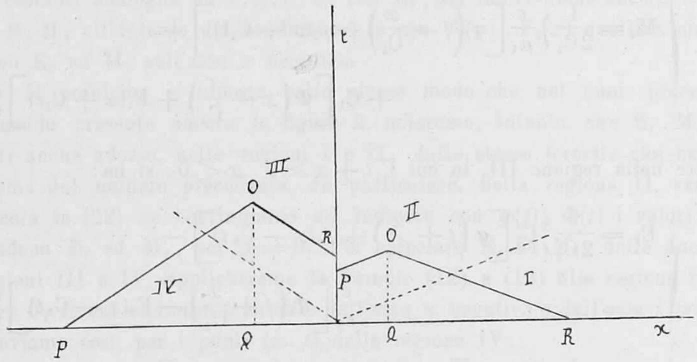

Fig. 2.

I dati del problema, in questo caso, sono i valori $f_1(x)$, $F_1(x)$ che E_1, M_1 assumono per $t=0$ ed x variabile fra 0 e $+\infty$ ed i valori $f_2(x)$, $F_2(x)$ che E_2, M_2 assumono per $t=0$ ed x variabile fra $-\infty$ e 0, queste quattro funzioni essendo legate dalle relazioni:

$$f_1(0)=f_2(0) \quad , \quad F_1(0)=F_2(0). \tag{20}$$

E, come risulta subito applicando a ciascuno dei due distinti dielettrici le considerazioni del num. precedente, il problema stesso si può ritenere risoluto se riusciamo a determinare, in funzione dei dati, i valori di

$$\varphi(t)=E_1(0,t)=E_2(0,t) \quad , \quad \Phi(t)=M_1(0,t)=M_2(0,t) \tag{21}$$

per ogni valore di $t>0$.

Per maggiore chiarezza, torniamo alla considerazione del piano xt e della regione σ che adesso è il semipiano $t>0$ (fig. 2). L'applicazione delle (12_1), (13_1), in ciascuna delle due parti di σ in cui è $x>0$, o $x<0$, ci porta subito a dividere σ in quattro regioni. Nella regione I, in cui $C_1 t - x \leq 0$, $x>0$, E_1 ed M_1 sono date dalle (17) quando si mutino, oltre ad E ed M in E_1 ed M_1, anche $\varepsilon, \mu, C, f, F$ in $\varepsilon_1, \mu_1, C_1, f_1, F_1$. Similmente, le stesse formole (17), quando, in esse, si mutino $E, M, \varepsilon, \mu, C, f, F$ in $E_2, M_2, \varepsilon_2, \mu_2, C_2, f_2, F_2$, ci daranno i valori di E_2, M_2 nella regione IV in cui $C_2 t + x \leq 0$, $x < 0$. Nella regione II, invece, in cui $C_1 t - x \geq 0$, $x > 0$, è:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2C_1}\left\{C_1\left[\varphi\left(t - \frac{x}{C_1}\right) + f_1(x + C_1 t)\right] + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{c}{\varepsilon_1}\left[\Phi\left(t - \frac{x}{C_1}\right) - F_1(x + C_1 t)\right]\right\},\\ M_1 &= \frac{1}{2C_1}\left\{\frac{c}{\mu_1}\left[\varphi\left(t - \frac{x}{C_1}\right) - f_1(x + C_1 t)\right] + \right.\\ &\qquad\left. + C_1\left[\Phi\left(x - \frac{t}{C_1}\right) + F_1(x + C_1 t)\right]\right\}, \end{aligned}\right.$$

mentre nella regione III, in cui $C_1 t + x \geq 0$, $x < 0$, si ha:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2C_2}\left\{C_2\left[\varphi\left(t + \frac{x}{C_2}\right) + f_2(x - C_2 t)\right] - \right.\\ &\qquad\left. - \frac{c}{\varepsilon_2}\left[\Phi\left(t + \frac{x}{C_2}\right) - F_2(x - C_2 t)\right]\right\},\\ M_2 &= \frac{1}{2C_2}\left\{-\frac{c}{\mu_2}\left[\varphi\left(t + \frac{x}{C_2}\right) - f_2(x - C_2 t)\right] + \right.\\ &\qquad\left. + C_2\left[\Phi\left(t + \frac{x}{C_2}\right) + F_2(x - C_2 t)\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Devono essere, inoltre, soddisfatte le condizioni:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} C_1\varphi(t) - \frac{c}{\varepsilon_1}\Phi(t) &= C_1 f_1(C_1 t) - \frac{c}{\varepsilon_1}F_1(C_1 t),\\ C_2\varphi(t) + \frac{c}{\varepsilon_2}\Phi(t) &= C_2 f_2(-C_2 t) + \frac{c}{\varepsilon_2}F_2(-C_2 t), \end{aligned}\right.$$

la prima delle quali ci assicura che, per $x = 0$, E_1 ed M_1 tendono a $\varphi(t)$ e $\Phi(t)$, mentre la seconda ci assicura che agli stessi valori $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ tendono anche, per $x = 0$, rispettivamente, E_2 ed M_2. Dalle equazioni (24) potremo, in ogni caso, ottenere le funzioni incognite $\varphi(t)$ e $\Phi(t)$ e completare così la soluzione del problema.

Lasceremo da parte lo sviluppo ulteriore della soluzione ottenuta, come pure l'applicazione di essa all'importante problema dell'incidenza normale di onde elettromagnetiche piane.

IV.

Campo elettromagnetico all'interno di un dielettrico e di un conduttore adiacenti.

11. Dei molti problemi della natura dei precedenti, che si possono immaginare, tratteremo ancora soltanto di quello in cui il campo elettromagnetico debba sempre considerarsi in tutto lo spazio, ma questo sia occupato, nella regione $x > 0$, dallo stesso dielettrico del num. precedente e, nella regione $x < 0$, da un conduttore di cui indicheremo con $\varepsilon_2, \mu_2, C_2, k_2$ le costanti analoghe ad ε, μ, C, k; con E_2, M_2 indicheremo ancora i valori di E, M, all'interno del conduttore; e con $f_2(x)$, $F_2(x)$ quelli a cui tendono E_2 ed M_2 sull'asse x negativo.

Il problema s'imposta nello stesso modo che nel num. precedente. Tenendo presente ancora la figura 2, noteremo, intanto, che E_1, M_1 sono dati anche adesso, nelle regioni I e II, dalle stesse formole che nel problema del numero precedente. In particolare, nella regione II, varranno ancora le (22) se continuiamo ad indicare con $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ i valori a cui tendono E_1 ed M_1, per $x = 0$. Per calcolare E_2 ed M_2, nelle due altre regioni III e IV, applicheremo le formole (12) e (13) alla regione $t \geqq 0$, $x \leqq 0$, il cui contorno è formato dall'asse x negativo e dall'asse t positivo. Troviamo così, per i punti (x, t) della regione IV:

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2C_2^2 \int_0^t E_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\
& \qquad = \int_{x - C_2 t}^{x} [\psi_{11} f_2(\xi) + \varphi_{11} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\
& \qquad + \int_{x}^{x + C_2 t} [\psi_{12} f_2(\xi) + \varphi_{12} f_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi , \\
& 2C_2^2 \int_0^t M_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\
& \qquad = \int_{x - C_2 t}^{x} [\psi_{21} f_2(\xi) + \varphi_{21} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\
& \qquad + \int_{x}^{x + C_2 t} [\psi_{22} f_2(\xi) + \varphi_{22} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi ,
\end{aligned}
\right.
$$

le funzioni $\varphi_{11}, \psi_{11}, \ldots, \psi_{22}$, in queste formole, essendo costruite con le costanti $\varepsilon_2, \mu_2, C_2, k_2$.

Le (25) sono sempre equazioni integrali in E_2 ed M_2 del tipo della (14), e come questa si potranno risolvere. Le formole di risoluzione mostrano, senza difficoltà, che, per $t=0$, E_2 ed M_2 tendono ai valori ad essi assegnati: $f_2(x)$ ed $F_2(x)$.

Per i punti (x, t) della regione III abbiamo, invece:

$$
(26) \quad \left\{
\begin{aligned}
& 2C_2^2 \int_0^t E_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\
& \qquad = \int_{x-C_2t}^{x} [\psi_{11} f_2(\xi) + \varphi_{11} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\
& \qquad + \int_x^0 [\psi_{12} f_2(\xi) + \varphi_{12} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi - \\
& \qquad - c \int_0^{t+\frac{x}{C_2}} \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{12}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{12}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=0} e^{k_2\tau}\, d\tau, \\
& 2C_2^2 \int_0^t M_2(\tau, x)\, e^{k_2\tau} \frac{I_1[k_2(\tau - t)]}{k_2(\tau - t)}\, d\tau = \\
& \qquad = \int_{x-C_2t}^{x} [\psi_{21} f_2(\xi) + \varphi_{21} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi + \\
& \qquad + \int_x^0 [\psi_{22} f_2(\xi) + \varphi_{22} F_2(\xi)]_{\tau=0}\, d\xi - \\
& \qquad - c \int_0^{t+\frac{x}{C_2}} \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{22}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{22}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=0} e^{k_2\tau}\, d\tau,
\end{aligned}
\right.
$$

ricordando che φ e Φ devono rappresentare anche i limiti di E_2 ed M_2, per $x=0$.

Affinchè, ora, quest'ultimo fatto accada, devono essere verificate le due condizioni seguenti:

$$
(27) \quad \left\{
\begin{aligned}
& - c \int_0^t \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{11}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{11}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=x=0} e^{k_2\tau}\, d\tau + \\
& \qquad + \int_{-C_2t}^{0} [\psi_{11} f_2(\xi) + \varphi_{11} F_2(\xi)]_{\tau=x=0}\, d\xi = 0, \\
& - c \int_0^t \left[\frac{1}{\mu_2} \varphi_{21}\, \varphi(\tau) + \frac{1}{\varepsilon_2} \psi_{21}\, \Phi(\tau)\right]_{\xi=x=0} e^{k_2\tau}\, d\tau + \\
& \qquad + \int_{-C_2t}^{0} [\psi_{21} f_2(\xi) + \varphi_{21} F_2(\xi)]_{\tau=x=0}\, d\xi = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

le quali formole non sono altro che il risultato dell'applicazione della (6) al triangolo un cui vertice è l'origine, e i due lati adiacenti, disposti sugli assi x negativo e t positivo, sono lunghi, rispettivamente, C_2t e t; e a ciascuna delle due coppie di soluzioni (U, V), $(\varphi_{11}, \psi_{11})$, e (U, V), $(\varphi_{21}, \psi_{21})$.

Naturalmente, queste due equazioni non sono fra loro indipendenti. Se si risolve la prima rispetto a φ, il che può ottenersi agevolmente notando che

$$\varphi_{11} = \frac{c}{\varepsilon_2}\,\frac{I_1[k_2(\tau-t)]}{k_2(\tau-t)}\,,$$

e si sostituisce il risultato nella seconda, si verifica facilmente che questa si riduce allora ad una identità. Basta dunque che sia soddisfatta una di esse perchè sia soddisfatta, in conseguenza, anche l'altra.

Per determinare, allora, $\varphi(\tau)$, $\Phi(\tau)$, e completare così la soluzione del nostro problema, si osservi che queste due funzioni incognite devono soddisfare alla prima delle (24), da cui si ha

$$\Phi(t) = \frac{\varepsilon_1 C_1}{c}\,\varphi(t) - \frac{\varepsilon_1 C_1}{c} f_1(C_1 t) + F_1(C_1 t)\,, \tag{28}$$

ed alla prima delle (27). Sostituendo in quest'ultima equazione il valore precedente di $\Phi(t)$, si trova, per determinare $\varphi(t)\,e^{k_1 t}$, un'equazione integrale di Volterra di prima specie col nucleo dato da

$$\left(\frac{c}{\mu_2}\varphi_{1,1} + C_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\psi_{1,1}\right)_{\xi=x=0} =$$
$$= C_2^2\,\frac{I_1[k_2(t-\tau)]}{k_2(t-\tau)} + C_1C_2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\{I_1'[k_2(t-\tau)] + I_1[k_2(t-\tau)]\} =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{C_2}{\varepsilon_2}\{(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2)\,I_0 + 2C_1\varepsilon_1 I_1 + (C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2)\,I_2\}\,,$$

l'argomento di I_0, I_1, I_2 essendo sempre $k_2(t-\tau)$. I principii da noi stabiliti su quest'argomento ci permettono di risolvere l'equazione agevolmente.

12. L'equazione da risolvere è, infatti, del tipo

$$\int_0^t \{a\,I_0[k(t-\tau)] + b\,I_1[k(t-\tau)] + c\,I_2[k(t-\tau)]\}\,\varphi(\tau)\,d\tau = \Phi(t), \tag{29}$$

a, b, c, k essendo 4 costanti e $\Phi(t)$ una funzione nota. Se ora moltiplichiamo ambo i membri della (29) per $\dfrac{I_1[k(t_1-t)]}{t_1-t}$ ed integriamo, rispetto a t, fra 0 e t_1, tenendo conto di altri nostri risultati [1], e cambiando il nome alle variabili, si trova

$$2a\varphi(t) + k\int_0^t \varphi(\tau)\,\{b\,I_0[k(t-\tau)] + (a+c)\,I_1[k(t-\tau)]\}\,d\tau =$$
$$= -k\int_0^t \Phi(\tau)\,\frac{I_1[k(\tau-t)]}{\tau-t}\,d\tau + 2\,\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi_1(t)\,. \tag{30}$$

[1] Vedi: *Su l'inversione di alcuni integrali* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 7°, pag. 474, formole (3) e (6″).

Derivando questa equazione rapporto a t, sostituendo quindi, al posto di I_1' l'espressione equivalente $\frac{1}{2}(I_0 + I_2)$ ed eliminando, infine, il termine contenente I_2 fra l'equazione che così si otterrebbe e la (29), si trova la nuova equazione

$$(31)\quad 2a\varphi'(t) + bk\varphi(t) + \frac{k^2}{2c}(c-a)\int_0^t \{(c+a)\,I_0[\cdots] + b\,I_1[\cdots]\}\varphi(\tau)\,d\tau =$$
$$= \Phi_1'(t) - \frac{k^2}{2c}(c+a)\,\Phi(t).$$

Le equazioni (30) e (31) possono essere risolute rispetto a

$$\int_0^t \varphi(\tau)\,I_0[\cdots]\,d\tau \quad \text{e} \quad \int_0^t \varphi(l)\,I_1[\cdots]\,d\tau$$

e, sostituendo i loro valori nella identità

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(\tau)\,I_0[\cdots]\,d\tau = \varphi(t) + k\int_0^t \varphi(\tau)\,I_1[\cdots]\,d\tau\,,$$

si trova subito, per determinare $\varphi(\tau)$, un'equazione differenziale ordinaria lineare e a coefficienti costanti del secondo ordine.

Matematica. — *Sul concetto di gruppo di monodromia per una funzione ad infiniti valori.* Nota di G. Andreoli, presentata dal Socio Volterra.

1. In questa Nota mi permetto mostrare in che modo si applichi la teoria, da noi accennata nella Nota precedente [1], al concetto di gruppo di monodromia di una funzione analitica ad infiniti valori: funzioni che chiameremo *polimorfe*.

Per un teorema di Volterra-Poincaré, è noto che una funzione analitica, nell'interno del suo campo di esistenza, può avere, al più, un'infinità numerabile di valori. Supporremo, per ora, che esista un punto, necessariamente interno al campo, tale che, formando gli sviluppi di Taylor per i diversi valori della funzione in tal punto, questi sviluppi convergano tutti in cerchi il cui minimo raggio sia $\varrho > 0$. Supporremo inoltre che, partendo con questi valori e seguendo cammini aperti privi di cappii, sia possibile di avere, in ogni punto d'esistenza della funzione stessa, tutti i valori di essa funzione. Naturalmente, tale punto potrebbe non esistere: mostreremo in fine come i ragionamenti fatti permangano.

[1] G. Andreoli, *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi* (questi Rendiconti, anno corrente).