

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Derivando questa equazione rapporto a t , sostituendo quindi, al posto di I_1 l'espressione equivalente $\frac{1}{2}(I_0 + I_2)$ ed eliminando, infine, il termine contenente I_2 fra l'equazione che così si otterrebbe e la (29), si trova la nuova equazione

$$(31) \quad 2a\varphi'(t) + bk\varphi(t) + \frac{k^2}{2c}(c-a) \int_0^t \{(c+a)I_0[\dots] + bI_1[\dots]\} \varphi(\tau) d\tau = \\ = \Phi_1'(t) - \frac{k^2}{2c}(c+a)\Phi(t).$$

Le equazioni (30) e (31) possono essere risolte rispetto a

$$\int_0^t \varphi(\tau) I_0[\dots] d\tau \quad \text{e} \quad \int_0^t \varphi(\tau) I_1[\dots] d\tau$$

e, sostituendo i loro valori nella identità

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\tau) I_0[\dots] d\tau = \varphi(t) + k \int_0^t \varphi(\tau) I_1[\dots] d\tau,$$

si trova subito, per determinare $\varphi(\tau)$, un'equazione differenziale ordinaria lineare e a coefficienti costanti del secondo ordine.

Matematica. — *Sul concetto di gruppo di monodromia per una funzione ad infiniti valori.* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. In questa Nota mi permetto mostrare in che modo si applichi la teoria, da noi accennata nella Nota precedente ⁽¹⁾, al concetto di gruppo di monodromia di una funzione analitica ad infiniti valori: funzioni che chiameremo *polimorfe*.

Per un teorema di Volterra-Poincaré, è noto che una funzione analitica, nell'interno del suo campo di esistenza, può avere, al più, un'infinità numerabile di valori. Supporremo, per ora, che esista un punto, necessariamente interno al campo, tale che, formando gli sviluppi di Taylor per i diversi valori della funzione in tal punto, questi sviluppi convergano tutti in cerchi il cui minimo raggio sia $\varrho > 0$. Supporremo inoltre che, partendo con questi valori e seguendo cammini aperti privi di cappii, sia possibile di avere, in ogni punto d'esistenza della funzione stessa, tutti i valori di essa funzione. Naturalmente, tale punto potrebbe non esistere: mostreremo in fine come i ragionamenti fatti permangano.

⁽¹⁾ G. Andreoli, *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi* (questi Rendiconti, anno corrente).

Dato un punto x_0 generico (che non sia di singolarità per nessuno dei rami della funzione), consideriamo tutti gli elementi analitici corrispondenti ai diversi valori della funzione in quel punto.

Diremo che:

I) Il punto x_0 è un punto regolare d'indice ϱ , qualora il limite inferiore dei raggi di convergenza degli sviluppi sia $\varrho \neq 0$;

II) è un punto regolare d'indice zero, o quasi singolare, se zero è limite inferiore dei raggi, senza essere il minimo;

III) è punto singolare se zero è il minimo: e, precisamente, di singolarità parziale se il limite superiore dei raggi è diverso da zero; di singolarità quasi totale se esso è zero, ma se vi sono dei ϱ (necessariamente in numero finito) diversi da zero; di singolarità totale se tutti i ϱ sono zero.

Le stesse definizioni si adottano per linee e per le aree: notiamo, poi, che le definizioni ora date equivalgono a dire che:

I) in un cerchietto di raggio ϱ , attorno ad x_0 , non v'ha alcun punto di singolarità di nessun elemento analitico;

II) il punto x_0 è punto limite di singolarità dei differenti elementi.

III) esso è punto di singolarità per qualche elemento, o non lo è per qualche elemento, o lo è per tutti.

2. Con tali definizioni, valgono i teoremi: *Per una funzione polimorfa:*

a) *L'insieme dei punti d'indice maggiore o eguale a ϱ , è un insieme chiuso: E_ϱ .*

Infatti, se $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ è una successione di punti tendenti ad x , nel cerchietto di raggio ε , piccolo a piacere, descritto intorno ad x , vi saranno dei punti x_n . Descrivendo attorno ad uno di questi un cerchietto di raggio ϱ , in esso valgono tutti gli sviluppi dei singoli elementi analitici: e quindi, per noti teoremi della teoria delle funzioni analitiche (osservando che un cerchietto di raggio $\varrho - \varepsilon$ attorno ad x è compreso in quello di raggio ϱ), potremo dire che in un cerchietto di raggio $\varrho - \varepsilon$ valgono tutti gli sviluppi riferiti al punto x .

Ma ε è piccolo a piacere: quindi tutti gli elementi riferiti ad x avranno, come campo di convergenza, almeno un cerchio di raggio ϱ , e quindi x è d'indice eguale o maggiore di ϱ .

b) *L'insieme E_0 dei punti singolari e quasi-singolare è chiuso:* cioè il punto limite d'una successione di punti singolari, o quasi, è un punto singolare o quasi.

c) *L'insieme dei punti quasi singolari è concentrato.*

d) *L'insieme dei punti singolari è concentrato.*

e) *L'insieme E dei punti di singolarità totale è chiuso.*

Questi cinque teoremi — evidenti, del resto — estendono il teorema: L'insieme dei punti singolari d'una funzione monodroma è chiuso.

Inoltre, si può fare una classificazione delle funzioni polimorfe in base al modo con cui sono formati gli insiemi E_p, E_o, E : si può chiamare così una funzione *polimorfa regolare* se l'insieme E_o è costituito da punti che ammettono un solo punto limite (si può sempre supporre che esso sia $l'∞$); e *funzione polimorfa singolare* se E_o occupa tutto il piano.

In tal caso il punto x_o , da cui abbiamo preso le mosse al n. 1, non esisterebbe; ma è facile il vedere che ciò che diremo muterebbe di pochissimo come enunciato, nel caso che vi fosse almeno un punto quasi-singolare.

Se invece non vi fossero che punti totalmente o parzialmente singolari, diremmo che la funzione è *polimorfa irregolare*: per ora escluderemo queste.

3. Passiamo ora al concetto di *prolungamento analitico complessivo*. Dati nel piano due punti A, B, non singolari nè quasi singolari: congiunti A e B con un qualsiasi arco di curva semplice (privo di cappi), invece di prolungare da A a B i singoli elementi analitici, prolunghiamoli tutti in blocco.

Con semplici ragionamenti, si vede che, se sull'arco AB non cadono punti singolari o quasi, si andrà da A in B con un numero finito di operazioni di prolungamento complessivo di raggio q .

Se invece su AB (estremi inclusi) vi sono dei punti quasi singolari, ciò non è più possibile; ma dato r grande ad arbitrio, si potranno determinare in corrispondenza un intero n_r ed un raggio q_r , in modo che i primi r elementi si prolunghino complessivamente da A a B mediante n_r operazioni di raggio q_r : per r tendente all'infinito, n_r vi tende anche, e q_r tenderà a zero.

Infine, se su AB vi è un punto di singolarità, il prolungamento complessivo diventa impossibile: e lo sarà anche l'ordinario, se la singolarità è totale.

Diremo che l'arco AB è regolare, nel primo caso; quasi singolare nel secondo; singolare nel terzo. Se AB è regolare, e q è il minimo indice dei suoi punti, diremo che AB è d'indice q .

4. Per la trattazione del gruppo di monodromia d'una funzione polimorfa, bisogna considerare gli insiemi E_p : i cammini in E_p definiranno un sottogruppo G_p del gruppo di monodromia.

Per le funzioni polimorfe regolari (ammettendo come punto-limite della successione $E_o, l'∞$), l'insieme E_p si ottiene descrivendo dei cerchi di raggio q attorno ai punti di E_o e considerando la parte esterna a tutti questi cerchi.

Può darsi che sia possibile di trovare un numero q sufficientemente piccolo in modo che tutti i cerchietti di raggio q , descritti attorno ai punti ξ di E_o , risultino staccati; o che ciò non sia possibile. Naturalmente, ciò proviene dal fatto che l'insieme $|\xi_r - \xi_s|$ ammette limite inferiore diverso da zero, oppure no.

Nel primo caso, il gruppo di monodromia si ottiene considerando quello relativo all'insieme E_p : le sue sostituzioni generatrici si ottengono girando in E_p con cammini di indice q attorno ai punti ξ di E_0 .

Nel secondo caso invece, il gruppo di monodromia, si ottiene dai sottogruppi $G_{p_1}, G_{p_2}, G_{p_3}, \dots$ ove q_n tende a zero: come si vede, qui entrano le questioni di convergenza astratta.

Infatti, supponiamo d'avere due funzioni polimorfe: una per cui esistano due soli punti singolari (l'origine e l'infinito); l'altra, una qualunque funzione polimorfa regolare. La somma di esse sarà ancora una funzione polimorfa regolare. Però noi vedremo che la singolarità della prima funzione sparisce nella somma, più non essendo resa visibile dal fatto che l' ∞ è per la seconda un punto di quasi singolarità (anche senza essere di diramazione).

Si può presentare quindi il seguente caso: data una successione di punti singolari e di diramazione $\xi_0, \xi_1, \dots$ tendenti ad un punto limite ξ , riconoscere se ξ sia semplicemente un punto singolare, oppure ad esso sia sovrapposto un punto di diramazione. È ovvio allora costruire dei cammini chiusi (supporremo d'avere funzioni regolari) che circondano $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi; \xi_2, \xi_3, \dots, \xi, \dots$: se $S_1, S_2, S_3, \dots$ sono le sostituzioni ad essi dovute e se questa successione di sostituzioni converge astrattamente ad S , S sarà la sostituzione relativa al punto ξ .

5. Per le funzioni polimorfe può accadere che i campi E_p non sieno connessi, ma constino di pezzi staccati: ciò è dovuto esclusivamente o a linee chiuse di quasi-singolarità oppure a parti staccate di lacune, che si riferiscono a diversi rami, ma che, riuniti assieme, non permettono il prolungamento complessivo.

Come abbiamo già detto, il primo caso non presenterebbe alcuna difficoltà, nè alcuna alterazione negli enunciati. Nel secondo caso invece entrano in considerazione le catene.

Si consideri infatti una funzione polimorfa assegnata coi suoi elementi in un punto x_0 d'indice q ; essa abbia l'origine e l' ∞ come punti di diramazione, ed una semiretta r non passante per x_0 , dall'origine, come sezione per il solo elemento p_1 ⁽¹⁾.

Ora, un qualunque cammino chiuso passante per x_0 , attorno all'origine, non può essere considerato come cammino di prolungamento complessivo. se lungo esso si vuol prolungare p_1 . D'altra parte, essendo l'origine e l' ∞ soli punti di diramazione, girando attorno ad essi, i rami si devono permutare.

Quindi, un cammino chiuso, percorso in un senso, dovrà portare p_1 ad arrestarsi alla semiretta r , e rendere impossibile il prolungamento com-

(¹) Possono effettivamente esistere tali funzioni?

plexivo. Percorso in un altro, dovrà mutare (per semplicità) p_1 in p_2 , p_2 in p_3 ... Perciò esso darà luogo ad una catena, ed il gruppo di monodromia si riduce alle potenze di questa.

Se si avessero tre funzioni g_1, g_2, g_3 del tipo ora detto, e le tre semirette fossero disposte in modo che l'origine di r_1 si trovi su r_2 , quella di r_2 su r_3 , quella di r_3 su r_1 , allora la funzione $g_1 + g_2 + g_3$ si troverebbe nelle condizioni dette dianzi: il piano verrebbe diviso in quattro regioni, e il prolungamento analitico complessivo sarebbe impossibile da una regione all'altra. Bisognerà allora studiare a parte il modo di connettersi dei diversi sottogruppi di monodromia, allorchè da una porzione di piano si passa all'altra.

6. Notiamo che, per la loro stessa definizione, tutti i punti singolari, o quasi, sono tali che i punti interni ad un cerchietto di raggio ρ , descritto intorno ad essi, non appartengono ad E_ρ .

Quindi, l'insieme complementare di E_ρ si ottiene formando l'insieme comune a tutti questi cerchietti: ed è facile il vedere che esso dovrà necessariamente essere composto da un numero finito o da un infinità numerabile di pezzi staccati (aventi area maggiore o eguale a $\pi\rho^2$).

Le generatrici del sottogruppo G_ρ , relativo all'insieme E_ρ , si trovano girando attorno a quei pezzi; le sue sostituzioni girando attorno ad essi un numero finito di volte.

Quindi

il sottogruppo G_ρ di monodromia (relativo all'insieme E_ρ) è formato, al più, da un infinità numerabile di generatrici: le sue sostituzioni sono il prodotto d'un numero finito di generatrici, e quindi formano anche esse un insieme numerabile.

Resta infine da studiare il sottogruppo G_0 : esso comprende, come suo sottogruppo, quello cui converge astrattamente qualsiasi successione $G_{\rho_1}, G_{\rho_2}, \dots, G_{\rho_n} \dots$, ove $\lim \rho_n = 0$.