ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

in esso saranno pure ulteriormente studiate le varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, ma prive di sistemi regolari isolati, su cui ormai si concentra tutto l'interesse delle nostre ricerche.

In particolare vi si troverà dimostrato che:

Una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p\ (>1)$, *priva di sistemi regolari isolati, ma dotata di (infiniti) integrali ellittici, non può presentare che due aspetti differenti; e cioè:*

a) o ha l'indice di singolarità $\dfrac{(p-1)(p+2)}{2}$, *e allora i suoi integrali ellittici, nessuno dei quali è a moltiplicazione complessa, costituiscono, secondo la nomenclatura del sig. Severi, una configurazione normale;*

b) o ha l'indice di singolarità p^2-1, *e allora ogni suo integrale (semplice di 1ª specie) è approssimabile mediante i suoi integrali ellittici; questi ultimi risultando tutti a moltiplicazione complessa.*

Matematica. — *Sull'equazione funzionale* $\int_a^b K(st)\,\theta(t)\,dt=0$.

Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio S. Pincherle.

Diremo che una funzione appartiene alla classe Φ se appartiene ad uno dei seguenti gruppi di funzioni ortogonali:

1°) funzioni trigonometriche, considerate nell'intervallo $a=0$, $b=2\pi$,

$$\operatorname{sen} kx \quad ; \quad \cos kx \qquad (k=0\,,1\,,2\,,\ldots);$$

2°) funzioni di Bessel, cioè le funzioni $(a=0\,,\ b=1)$,

$$P_{\mu,k}=P_\mu(\lambda_k x)\,,$$

dove P_μ è una funzione che soddisfa all'equazione

$$xP''_\mu+(2\mu+1)\,P'_\mu+xP_\mu=0\ \text{(1)},$$

μ essendo una costante reale qualunque, e λ_k $(k=1\,,2\,,3\,,\ldots)$ rappresentano le radici positive d'una delle seguenti equazioni:

$$P_\mu(z)=0\quad,\quad P'_\mu(z)=0\quad,\quad zP'_\mu(z)-hP_\mu(z)=0\,,$$

h essendo una costante qualunque, diversa da zero;

3°) funzioni di Lamé;

4°) polinomi di Tchébicheff e, in particolare, polinomi di Jacobi e funzioni di Legendre;

(1) Gli accenti indicano l'ordine di derivazione.

5°) funzioni V_k $(k=1,2,3,...)$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$\left.\begin{array}{lll} V_k''+(\lambda_k p-q)V_k=0 & \text{per} & a<x<b \\ V_k'-hV_k=0 & \text{»} & x=a \\ V_k'+\varrho V_k=0 & \text{»} & x=b \end{array}\right\} \quad (k=1,2,3,...),$$

dove p e q sono funzioni continue e positive della x, la prima delle quali non s'annulla nell'intervallo (a,b); h e ϱ sono delle costanti positive date, e λ_k una costante positiva ben determinata per ogni soluzione V_k.

Se $\varphi_\nu(s)$ $(\nu=1,2,3,...)$ rappresenta una successione qualunque di funzioni della classe suddetta Φ, sussistono i seguenti teoremi [1]:

α) Se la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(s)\,d_\nu\,,\quad d_\nu=\int_a^b\varphi_\nu(s)\,g(s)\,ds$$

è uniformemente convergente, sarà

$$g(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(s)\,d_\nu\,,$$

in tutti i punti di (a,b) in cui la funzione $g(s)$ è continua.

Da questo teorema discende, come corollario, l'altro, di cui faremo uso:

Se la funzione data $g(s)$ è tale che le costanti d_ν, da un indice n in poi, siano tutte nulle, sarà

$$g(s)=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(s)\,d_\nu\,,$$

in tutti i punti di (a,b) in cui la $g(s)$ è continua.

β) Qualunque sia la $g(s)$, purchè limitata ed integrabile, sarà sempre valido lo sviluppo

$$\int_a^b\{g(s)\}^2\,ds=\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu^2\quad;\quad d_\nu=\int_a^b\varphi_\nu(s)\,g(s)\,ds\,.$$

2. Ciò premesso, consideriamo l'equazione, a nucleo *simmetrico*,

$$\int_a^b K(st)\,\theta(t)\,dt=0\,, \tag{1}$$

e proponiamoci di studiare la natura delle sue soluzioni.

Nella (1), dopo aver mutato s in r, se ne moltiplichino ambo i membri per $K(sr)\,dr$ e si integri; avremo così la successione

$$\int_a^b K_n(st)\,\theta(t)\,dt=0\,.\qquad (n=1,2,...)$$

[1] Stekloff, *Sur certaines égalités générales* ecc. Mem. de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIII série, tomo XV, n. 7.

Si dividano ambo i membri della $2n^{esima}$ uguaglianza, così ottenuta, per γ^n [1], e si passi al limite per $n=\infty$. Ricordando [2] che la funzione $\frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}$ tende, al crescere di n, uniformemente ad una funzione $H(st)$ continua, positiva e non identicamente nulla, avremo al limite l'equazione

$$\int_a^b H(st)\,\theta(t)\,dt = 0, \tag{2}$$

le cui soluzioni sono *tutte* rappresentate da

$$\theta(s) = \chi(s) - \int_a^b H(st)\,\chi(t)\,dt\,, \tag{3}$$

dove $\chi(s)$ è una funzione qualunque, purchè integrabile e finita.

Infatti, che ogni $\theta(s)$ definita dalla (3) sia soluzione della (2), lo si vede subito, sostituendo in questa, a $\theta(t)$, l'espressione (3) ed osservando che

$$\int_a^b H(sr)\,H(rt)\,dr = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n}(sr)}{\gamma^n}\,\frac{K_{2n}(rt)}{\gamma^n}\,dr = \lim_{n=\infty}\frac{K_{4n}(st)}{\gamma^{2n}} = H(st)\,;$$

d'altra parte, è poi evidente che, se $\psi(s)$ è una soluzione della (2), si potrà sempre scrivere

$$\psi(s) = \psi(s) - \int_a^b H(st)\,\psi(t)\,dt\,,$$

e che quindi la $\psi(s)$ si potrà mettere sotto la forma (3).

La (3) rappresenterà perciò tutte le soluzioni della (2); e, poichè tra le soluzioni di questa vi sono evidentemente anche quelle della (1), potremo affermare che la (3) rappresenterà anche *tutte* le soluzioni della (1).

Sostituiamo nella (1), a $\theta(t)$, il valore dato dalla (3). Essendo

$$\int_a^b K(st)\,dt\int_a^b H(tr)\,\chi(r)\,dr = \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{K_{2n+1}(sr)}{\gamma^n}\,\chi(r)\,dr = \lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n+1}(s)}{\gamma^n}\,,$$

avremo

$$\chi_1(s) = \lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n+1}(s)}{\gamma^n}\,.$$

E poichè

$$\lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n+1}(s)}{\gamma^n} = \lim_{n=\infty}\frac{1}{\gamma}\int_a^b K_2(sr)\,dr\int_a^b \frac{K_{2n-1}(rt)}{\gamma^{n-1}}\,\chi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int_a^b K_2(sr)\lim_{n=\infty}\frac{\chi_{2n-1}(r)}{\gamma^{n-1}}\,dr = \int_a^b K_2(sr)\,\frac{\chi_1(r)}{\gamma}\,dr = \frac{\chi_3(s)}{\gamma}\,,$$

(1) Si ricordi che $\gamma = \lim \gamma_n$ e che $\gamma_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$.

(2) Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener.* Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905, § 11.

sarà anche

$$\chi_1(s) = \frac{\chi_2(s)}{\gamma} .$$

Ne segue che le funzioni $\chi(s)$, tali che, per esse, la (3) rappresenti le soluzioni della (1), dovendo tutte soddisfare quest'ultima eguaglianza, avranno necessariamente tutte le costanti C_n eguali tra loro per $n \geqq 1$ [1]. Indicando con $g(s)$ una qualunque di tali funzioni, alle soluzioni della (1) potrà allora darsi la seguente forma:

$$\theta(s) = g(s) - \frac{g_2(s)}{\gamma} . \tag{4}$$

3. Alla (4) si può dare anche un'altra forma, che ci tornerà utile. Siccome l'equazione

$$g_1(s) = \int_a^b K(st(g(t)\, dt$$

ammette soluzione, dovrà aversi, per la condizione Picard-Lauricella [2],

$$g_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b \varphi_\nu(s)\, g_1(s)\, ds = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_\nu} ,$$

dove

$$d_\nu = \int_a^b \varphi_\nu(s)\, g(s)\, ds ;$$

e quindi anche

$$g_3(s) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_\nu^3} .$$

Ed avendosi, per tutte le funzioni $g(s)$ considerate,

$$g_1(s) - \frac{g_3(s)}{\gamma} = 0 , \tag{5}$$

sarà

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_\nu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_\nu^2 \gamma}\right) = 0 ;$$

da cui si deduce che, per tutti i valori di ν, dovrà aversi

$$\frac{d_\nu}{\lambda_\nu} \left(1 - \frac{1}{\lambda_\nu^2 \gamma}\right) = 0 .$$

(1) Vergerio, *Sull'equazione integrale di 1ª specie*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta dell'8 nov. 1914.

(2) *Sull'equasione integrale di 1ª specie*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°.

Il secondo fattore di questo prodotto è nullo solo pei valori $\lambda_1 = + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, $\lambda_2 = - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$; dovrà quindi essere necessariamente

$$d_\nu = 0 \qquad (\nu = 3, 4, 5, \ldots).$$

Con ciò avremo

$$g_1(s) = \sum_{\nu=1}^{p_1} \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_1} + \sum_{\nu=1}^{p_2} \frac{\varphi_\nu(s)\, d_\nu}{\lambda_2}, \tag{6}$$

dove p_1 e p_2 rappresentano il numero delle autofunzioni linearmente indipendenti, relative a λ_1 e λ_2 rispettivamente.

Dall'ultima eguaglianza si deduce, notando che $\lambda_1^2 \gamma = \lambda_2^2 \gamma = 1$,

$$\frac{g_2(s)}{\gamma} = \sum_{\nu=1}^{p_1} \varphi_\nu(s)\, d_\nu + \sum_{\nu=1}^{p_2} \varphi_\nu(s)\, d_\nu = \sum_{\nu=1}^{p} \varphi_\nu(s)\, d_\nu,$$

avendo posto $p_1 + p_2 = p$.

La (4) può quindi scriversi

$$\theta(s) = g(s) - \sum_{\nu=1}^{p} \varphi_\nu(s)\, d_\nu \text{ (}^1\text{)}. \tag{4'}$$

4. Facciamo l'ipotesi che le costanti γ_n, relative a $K(st)$, siano tutte eguali tra loro. Sappiamo [2] che allora la (5) è sempre soddisfatta, qualunque sia la $g(s)$, purchè finita ed integrabile in (a, b). Le soluzioni $\theta(s)$ non potranno, in questo caso, essere *tutte* identicamente nulle; perchè, se ciò fosse, si dovrebbe avere, per ogni funzione finita ed integrabile $g(s)$,

$$g(s) = \frac{g_2(s)}{\gamma};$$

e si dovrebbe conchiudere [3] che l'equazione

$$g(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt$$

[1] Il Lauricella aveva già incidentalmente osservato (*Sopra alcune equazioni integrali*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta 21 giugno 1908) che le soluzioni della (1) si possono mettere sotto la forma

$$\chi(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b \varphi_\nu(s)\, \chi(s)\, ds,$$

dove $\chi(s)$ è una funzione integrabile qualunque. Non avendo però approfondito la questione, non aveva notato che le $\chi(s)$ non possono essere qualunque, e che la serie si riduce alla somma d'un numero finito di termini.

[2] Vergerio, *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie*. Questi Rendiconti, seduta 6 giugno 1915.

[3] Cfr. la prima delle mie Note citate.

ammette soluzione, qualunque sia la $g(s)$, purchè integrabile e finita; il che evidentemente non può essere. Possiamo pertanto affermare che

se le costanti γ_n di $K(st)$ *sono tutte eguali tra loro, le soluzioni* $\theta(s)$ *della* (1) *non possono essere tutte identicamente nulle;* ed anche (ciò che è poi lo stesso) che *condizione necessaria affinchè la* (1) *sia a funzione caratteristica* [1] *chiusa è che le costanti γ_n non siano tutte eguali tra loro.*

5. Osserviamo che dalla (4) si deduce immediatamente che, se $K(st)$ è una funzione limitata entro il suo campo di variabilità $\left(\text{tale essendo allora anche la } \frac{g_2(s)}{\gamma}\right)$, la $g(s)$ sarà anch'essa limitata o no, a seconda che lo sarà o no la $\theta(s)$.

Analogamente, essendo $g_2(s)$ continua [2], la continuità di $g(s)$ dipenderà da quella di $\theta(s)$; e le eventuali discontinuità di una di esse saranno della stessa natura di quelle dell'altra.

Ciò premesso, facciamo l'ipotesi che le p autofunzioni linearmente indipendenti di $K(st)$, relative agli autovalori $\pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, appartengano alla classe Φ; e tra le soluzioni $\theta(s)$ della (1) consideriamo quelle che sono continue in (a, b), e quelle che sono puntualmente discontinue.

Per quanto osservammo più sopra, le $g(s)$ corrispondenti saranno funzioni della stessa natura; quindi per il corollario del teorema α) (ved. n. 1), il secondo membro della (4') sarà nullo in ogni punto di (a, b), se la $g(s)$ ivi è continua; sarà da eccettuarsi un numero finito di punti, se è puntualmente discontinua.

6. Aggiungasi ora la condizione che la $K(st)$ sia una funzione limitata; e tra le $\theta(s)$ si considerino quelle che sono limitate. Tali dovendo allora essere anche le corrispondenti $g(s)$, avremo, pel teorema β) del n. 1,

$$V_0 = \sum_{\nu=1}^{p} d_\nu^2 \quad ; \quad V_0 = \int_a^b [g(s)]^2\, ds\,.$$

[1] Per noi le due espressioni nucleo e funzione caratteristica sono sinonimi.

[2] Invero dalla convergenza uniforme di $\frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}$ verso il limite $H(st)$, discende quella, pure uniforme, degli integrali

$$\frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = \int_a^b \frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}\, g(t)\, dt$$

verso il loro limite, il quale perciò sarà una funzione continua.

E poichè, per ogni $n \geq 1$, si ha (cfr. la prima delle mie Note citate)

$$\frac{g_2(s)}{\gamma} = \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n}\,,$$

sarà pure $g_2(s)$ una funzione continua.

E poichè dalla (6), mediante quadratura ed integrazione, s'ottiene

$$V_1 = \gamma \sum_{\nu=1}^{p} d_\nu^2 \quad , \quad \left(\int_a^b [g_1(s)]^2 = V_1 \right),$$

avremo

$$(7) \qquad c_0 = \frac{V_1}{V_0} = \gamma\,;$$

cioè, qualunque sia n,

$$c_0 = c_n \text{ [1]};$$

e quindi [2]

$$\theta(s) = g(s) - \frac{g_2(s)}{\gamma} = 0\,.$$

Quest'ultima eguaglianza ci dice che le soluzioni limitate $\theta(s)$ saranno tutte nulle.

Riassumendo:

Se le autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo ***simmetrico*** $K(st)$, *relative agli autovalori* $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, *sono funzioni della classe* Φ, *le soluzioni continue della* (1) *saranno tutte identicamente nulle in* (a, b), *come pure quelle puntualmente discontinue, eccettuato per quest'ultime un numero finito di punti. Se poi* $K(st)$ *è anche limitata, non solo saranno nulle tutte le soluzioni continue e puntualmente discontinue* (*colla suddetta eccezione*), *ma lo saranno anche tutte quelle limitate.*

7. Non sarà infine del tutto inutile notare che, nel caso in cui si sappia *a priori* che le soluzioni dell'equazione (1) che si considera debbano essere *tutte continue*, oppure *tutte limitate* [se tale è anche la $K(st)$], potremo affermare, ricordando il teorema del n. 4, che

se le costanti γ_n *non sono tutte eguali tra loro, e le autofunzioni linearmente indipendenti di* $K(st)$, *relative agli autovalori* $\pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, *appartengono alla classe* Φ, *l'equazione* (1) *sarà a funzione caratteristica chiusa.*

[1] Nella seconda delle mie Note citate ho dimostrato che, se $g(t)$ non è soluzione dell'equazione $\int_a^b H(st)\,h(t)\,dt = 0$, sarà $\lim_{n=\infty} c_n = \gamma$. Qui si vede subito che il caso di eccezione non è verificato. Invero, se fosse $\int_a^b H(st)\,g(t)\,dt = \lim_{n=\infty} \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = 0$, in grazia dell'uguaglianza $\frac{g_2(s)}{\gamma} = \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n}$ $(n \geq 1)$, sarebbe $g_2(s) = 0$; ed anche, per l'altra

$$V_1 = \int_a^b g(s)\,g_2(s)\,ds\,,$$

$V_1 = 0$. Si avrebbe quindi, per la (7), $V_0 = 0$ (la costante γ non potendo essere mai nulla); da cui seguirebbe $g(s) = 0$ identicamente, contro il supposto.

[2] Cfr. la prima delle mie Note citate.