ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Storia della matematica. — *Sulle scoperte di Pietro Mengoli.* Nota II di GIOVANNI VACCA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una Nota precedente ho posto in rilievo l'attività scientifica del matematico bolognese Pietro Mengoli. Converrà ora osservare che a lui spetta un merito non piccolo, finora non osservato da alcuno, se non forse dal Leibniz, relativo alle notazioni, le quali, come il Leibniz diceva, non sono una piccola parte dell'arte d'inventare.

V. (¹) È nella *Geometria Speciosa* pubblicata nel 1659 che il metodo è esposto diffusamente.

Già Bonaventura Cavalieri nella sua *Geometria* del 1637 aveva adoperato in senso tecnico la parola *omnes lineae* di una figura data, per indicare lo stesso ente che noi indichiamo, seguendo Leibniz, col simbolo $\int$.

Mengoli adopera dapprima la lettera O, per le somme finite.

Così, per lui (²),

$$O.\,2a = t^2 - t$$

significa

$$\sum_{r=1}^{r=n} 2r = n^2 - n$$

Adopera invece il simbolo FO (³) per le somme di infinite linee. Indica con a la variabile che noi diciamo ora abitualmente x, e chiama infine r (iniziale della parola residuo) ciò che noi chiamiamo ora $1 - x$.

Allora

$$FO.\,ar \; ; \; FO.\sqrt{ar} \; ; \; FO.\,a^2r^3$$

rappresentano gli stessi enti che noi indichiamo con

$$\int_0^1 x(1-x)dx \; ; \; \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx \; ; \; \int_0^1 x^2(1-x)^3 dx \, ,$$

e calcola, con lunghi tentativi dapprima, e poi rigorosamente, tutti gli integrali binomii ad esponenti interi e positivi (⁴).

(¹) Continua la numerazione dei paragrafi della Nota precedente, a pag. 508 di questo volume.

(²) *Geometria speciosa*, Bononiae, 1659, Elementum secundum, pag. 38.

(³) ibid., libr. VI, pag. 367 e segg. FO è il principio della parola *forma*.

(⁴) È veramente deplorevole che il Mengoli abbia atteso dodici anni prima di pubblicare questi importanti risultati, già contenuti sotto altra forma, nell'*Arithmetica infi-*

Tutti questi sforzi avevano uno scopo ben chiaro.

« His demonstratis, cogitabam si possent aliae quadraturae inveniri ex
« inventis compositae, in quas insignis aliqua resolvatur; quemadmodum in
« triangula, parabolam Archimedes resolvit. Et quaesivi primum de omnibus
« figuris, in quibus ordinatae ad basim, sunt omnes potestates abscissarum,
« primae, secundae, tertiae, et deinceps in infinitum; quas ex demonstratis
« a Cavallerio ... deprehendebam esse in serie harmonica naturali ab unitate;
« earumque summam demonstravi excrescere in infinitum, in praefatione ad
« meum libellum, cuius titulus *Novae quadraturae arithmeticae, seu de*
« *additione fractorum* ... » [1].

Nelle quali parole, se non m'inganno, io leggerei il notevole risultato:

$$\int_0^1 (1 + x + x^2 + \ldots)\, dx = \infty,$$

VI. Lo stile del Mengoli è spesso contorto ed oscuro, a causa forse della preoccupazione che egli ebbe di esser rigoroso. Le sue notazioni sono diverse da quelle degli altri matematici, e perciò, sebbene spesso razionali, insolite. Così ad esempio egli osserva (e Leibniz ripeterà poi come sua l'osservazione) che invece delle parentesi una semplice virgola può adempiere allo stesso ufficio, e scrive quindi $a + b\,, c$ ciò che noi scriviamo $(a + b)c$.

Così ancora rileva l'inconveniente tipografico che presenta la linea di divisione orizzontale, ed adopera invece a tale ufficio le parentesi, scrivendo $a(b)$ ciò che noi scriviamo $\frac{a}{b}$.

Infine invece di scrivere gli esponenti più piccoli in alto, li scrive di seguito, così scrive $a2\,b3$, ciò che noi scriviamo $a^2 b^3$.

Ciò può spiegare come sia sfuggita all'attenzione dei più la sua teoria originale, rigorosa e puramente aritmetica dei logaritmi, la quale lo condusse a scoprire ed a pubblicare nel 1659, i primi sviluppi in serie infinita dei logaritmi dei numeri razionali.

---

nitorum del Wallis 1655). Così infatti dice il Mengoli nella lettera dedicatoria a Gian Domenico Cassini (*Geometria speciosa*, Elementum sextum, pag. 348):

« Ante annos duodecim, occasione cuiusdam problematis mihi propositi a D. Antonio
« Rocca Regiensi, de figura unilinea describenda, quae secaret ellipsim in duobus punctis
« innumerabiles eiusmodi figuras excogitavi, quas tunc per Geometriam indivisibilium
« quadrabam .. ».

[1] *Geometria speciosa*, Elementum Sextum, pag. 363. Nove anni più tardi, nel 1668, Nicola Mercator pubblicava la sua *Logarithmotechnia*. Se il Mercator avesse conosciuto l'opera del Mengoli (il che sembra oggi difficile poter accertare) si potrebbe spiegare in modo assai semplice la genesi della scoperta della serie di Mercator, e capire altresì come il Mercator non abbia poi scritto più nulla sulle serie infinite, malgrado che continuasse poi a pubblicare molti anni dopo altri scritti di matematica.

Converrà però adoperare un linguaggio più semplice, per esporre rapidamente queste idee del Mengoli.

Dato il numero intero e positivo n, si considerino le due successioni

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\,,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\,,\quad \frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n-1}\,,\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,,\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\,,\quad \frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{3n}\,,\ldots$$

Il Mengoli chiama la prima successione di *iperlogaritmi* del numero n, e la seconda successione di *ipologaritmi* del numero n.

Chiama allora *logaritmo* di n l'unica quantità maggiore di tutti gli *iperlogaritmi* e minore di tutti gli ipologaritmi [1].

Se poi m, n sono interi e positivi ed $m > n$, se $\frac{m}{n}$ è intero, si vede subito che il logaritmo di $\frac{m}{n}$ è compreso tra le due successioni

$$(A)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{m-1}\,,\quad \dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2m-1}\,,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{1}{3n}+\cdots+\dfrac{1}{3m-1}\,,\ldots \\ \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{m}\,,\quad \dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2m}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{1}{3n+1}+\cdots+\dfrac{1}{3m}\ldots \end{array}\right.$$

(poichè queste successioni fanno parte di quelle che definiscono $\log\frac{m}{n}$, e c.). Quindi si conclude facilmente [2] che

$$\log m - \log n = \log\frac{m}{n}\,.$$

la quale è la proprietà fondamentale dei logaritmi; e si vede pure che è naturale definire $\log\frac{m}{n}$ per mezzo delle successioni (A) nel caso in cui $\frac{m}{n}$ non è intero.

[1] *Porro logarithmus est illa quantitas, ad quam tendunt hyperlogarithmi cum semper deinceps minuuntur, et ad quam tendunt hypologaritmi cum semper deinceps augentur; omni minor hyperlogarithmo, et omni maior hypologarithmo.* Geometria speciosa, Introd., pag. 69.

[2] *Patet... quod compositae rationis logarithmus est aggregatus componentium logarithmorum,* ibid., pag. 71.

Da questa definizione di logaritmo di un numero razionale il Mengoli trae immediatamente uno sviluppo in serie infinita ([1]), cioè:

$$\text{(B)} \qquad \log\frac{m}{n} = \sum_{r=0}^{r=\infty}\left\{\sum_{s=1}^{s=m}\frac{1}{rm+s} - \sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{rn+s}\right\};$$

quindi per esempio:

$$\log 2 = \left(1+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$\log\frac{3}{2} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

La prima di queste due formole non è altro, sotto forma leggermente diversa, che la formola

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

trovata poi dal Mercator per una via più diretta e più feconda, e riscoperta più tardi del Brouncker con un metodo sostanzialmente non diverso da quello del Mengoli.

VII. Rimarebbe ancora da esporre sommariamente quali sforzi il Mengoli abbia fatto nel suo *Anno*, per rendersi conto del cammino percorso dal sole. Ma i suoi sforzi, per quanto sterili, e per quanto oramai inutili, perchè Newton già da qualche anno aveva meditato e risolto problemi ben più vasti, si prestano ad alcune considerazioni che spero di esporre in un'altra occasione.

([1]) Il Mengoli chiama *prologaritmi* del n. m e del numero n, rispettivamente le due sommatorie finite che figurano a destra della formola (B), la quale è quindi enunciata da lui così:

Ordinetur summa excessuum primi prologarithmi supra primum, ... et secundi supra secundum, et tertii supera tertium, et sic deinceps in infinitum: omnium summa excessuum, est logarithmus rationis quam habent numeri..., ibid., pag. 74.