ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica. — *Profili del pelo libero in canali di profondità finita.* Nota II di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella Nota precedente (¹) ho assegnato una equazione generale, che definisce, con approssimazione, il profilo del pelo libero in un canale di profondità finita.

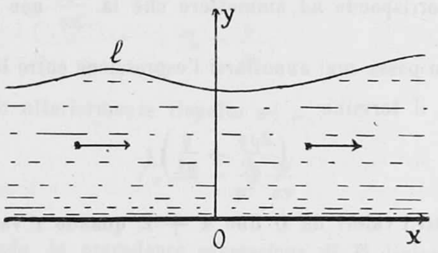

FIG. 1.

Assunto l'asse x coincidente col fondo e l'asse y verticale ascendente, e posto

$$\eta = x + \left(\frac{gy^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t , \tag{I}$$

l'equazione è la seguente:

$$F(y , \eta) = 0 , \tag{II}$$

dove: F è simbolo di funzione arbitraria di y e di η; q rappresenta la portata della corrente nel canale, g l'accelerazione di gravità e t il tempo.

Mi propongo ora di discutere la validità di questo risultato e dedurre alcune notevoli conseguenze da esso.

Conviene intanto notare, fin da ora, che, per $t = 0$, la (II) definisce la configurazione iniziale del pelo libero; una volta che questa sia assegnata, la (II) stessa definisce, per t qualunque, la forma del medesimo negli istanti successivi.

1. Dalla (II) si ha, derivando rispetto ad x,

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 ;$$

(¹) Questi Rendiconti, vol. XXIV, 2° sem., fasc. 11, pag. 503.

ed essendo, per la (1),

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 + \left(\frac{2gy}{q} + \frac{q}{y^2}\right) t \cdot \frac{\partial y}{\partial x},$$

si ha

$$(1) \qquad \frac{\partial y}{\partial x} \left\{ \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}} + \left(\frac{2gy}{q} + \frac{q}{y^2}\right) t \right\} + 1 = 0 .$$

Escludiamo che la tangente al pelo libero possa divenire verticale. Ciò analiticamente corrisponde ad ammettere che la $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ non diventi mai infinita, cioè che non possa mai annullarsi l'espressione entro le $\{ \ \}$ nella (1). Essendo $y > 0$, il termine

$$\left(\frac{2gy}{q} + \frac{q}{y^2}\right) t$$

può assumere tutti i valori da 0 fino a $+\infty$ quando t varia da 0 a $+\infty$; ne segue che, affinchè l'accennata espressione entro le $\{ \ \}$ non si annulli mai, è necessario e basta che sia

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \geq 0 ,$$

ammesso che tutto varii con continuità.

Verificata questa circostanza, dalla (1) scende

$$\lim_{t=\infty} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 ;$$

cioè: *la conformazione assintotica* (rispetto al tempo, cioè per $t = \infty$) *del pelo libero è una retta orizzontale.*

Dalla (1) scende ancora la seguente disuguaglianza, quando si tenga conto della (2):

$$(3) \qquad \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \leq \left| \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \right| .$$

2. Richiamo dalla Nota precedente la circostanza che l'equazione (II) è stata dedotta supponendo gli sviluppi (4) arrestati ai primi termini. Ciò,

in sostanza, equivale ad applicare alla $f(x+iy\,,t)$ — ivi introdotta — lo sviluppo di Taylor arrestato al terzo termine, trascurando quest'ultimo; posto, cioè,

$$f(x+iy\,,t)=f(x\,,t)+iyf'_x(x\,,t)-\tfrac{1}{2}y^2f''_x(x+i\theta y\,,t)\,,$$

con $0<\theta<1$ la quantità che si trascura è, in valore assoluto, data dalla seguente espressione:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}y^2\,|f''_x(x+i\theta y\,,t)|\,.$$

Dalla prima delle (6) della Nota I si ha

$$f'_x=\frac{q}{y}\,,$$

da cui, derivando ulteriormente rispetto ad x,

$$f''_x=-\frac{q}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\,;$$

per cui, sostituendo, la precedente espressione di E diviene

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}q\,|y'_x(x+i\theta y\,,t|\,,$$

e, per la (3),

$$\mathrm{E}\leq\frac{1}{2}q\left|\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}\right|\,, \tag{4}$$

dove nel secondo membro si deve intendere sostituito x con $x+i\theta y$.

3. Applichiamo le precedenti considerazioni ad un caso semplice e notevole. Sia ε una costante da trattarsi come quantità di primo ordine — naturalmente quando ha per coefficiente una quantità che si mantiene finita — e poniamo

$$\mathrm{F}(y\,,\eta)=\eta-1-\varepsilon\mathrm{G}(\varepsilon\eta)=0\,, \tag{5}$$

dove G è una funzione dell'argomento indicato e tale che essa e la sua prima derivata rispetto all'argomento stesso non superino, in valore assoluto, l'unità [1]:

$$|\mathrm{G}|\leq 1 \qquad |\mathrm{G}'|\leq 1\,. \tag{6}$$

[1] Evidentemente ci si può sempre esprimere in tal modo, quando si parla di funzioni che non debbono superare, in valore assoluto, numeri finiti prefissati.

Scende, dalla (5), che εG può interpretarsi come rapporto tra lo spostamento verticale dalla retta $y = 1$ e l'unità; l'ipotesi che esso va riguardato come quantità di primo ordine, rispecchia la circostanza che la curva (5) poco differisce dalla retta $y = 1$.

D'altra parte, la retta $y = 1$ rappresenta il profilo del pelo libero in un canale tranquillo, di profondità 1. La (5) rappresenta pertanto piccoli increspamenti alla superficie di un canale, di profondità unitaria, lievemente perturbato.

Dalla (5) si ha ancora, derivando, e tenendo presenti le (6),

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = -\varepsilon^2 G' = 0 ;$$

e, per queste, la (4) diviene

$$E = 0 ,$$

e, di più, rimane verificata la (2).

4. Per maggior chiarezza reputo non oziosa una avvertenza. A prima vista dal fatto che, con l'accennata approssimazione, è sensibilmente $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$, si sarebbe tratti senz'altro a dire che, dipendendo allora la F dalla sola y, è $y =$ costante l'equazione del pelo libero. Ciò non è vero, inquantochè — come risulta dalla (5) — la y è variabile con η, il che è quanto dire con x e con t.

Immaginiamo infatti, nella (5), la funzione G sviluppata colla formola di Mac-Laurin:

$$G(\varepsilon\eta) = G(0) + \varepsilon\eta\, G_1'(\theta\varepsilon\eta) \qquad (0 < \theta < 1) ;$$

con che la (5) stessa diviene

$$y = 1 + \varepsilon G(0) + \varepsilon^2\eta\, G_1'(\theta\varepsilon\eta) .$$

Non si può ritenere trascurabile l'ultimo termine, non ostante la presenza del fattore di secondo ordine ε^2, poichè l'altro fattore η cresce indefinitamente, sia con x, sia con t; e non è da dirsi che, per valori di η abbastanza grandi, in valore assoluto, la quantità $\varepsilon^2\eta$ si mantenga di ordine superiore al primo e sia quindi trascurabile [cfr. n. 3].

Dunque y è da ritenersi effettivamente variabile con η.

Si tratta, insomma, di piccolissimi increspamenti, non permanenti, in cui la variazione di direzione del pelo libero è così insensibile da ritenersi trascurabile; mentre non è trascurabile, nello stesso ordine di approssimazione, lo scostamento del pelo libero dalla retta $y = 1$.

5. Per quanto si è visto precedentemente, qualunque funzione G, soddisfacente alle sole condizioni (6), è atta a rappresentare un possibile anda-

mento del profilo del pelo libero, nelle circostanze supposte. Così, in particolare, prendendo per G successivamente le funzioni

$$\text{sen} \quad , \quad \text{Sech} \quad , \quad \text{Tangh}$$

soddisfacenti ognuna alle condizioni (6), si hanno altrettanti profili che, allo stato iniziale ($t = 0$), hanno gli andamenti rappresentati rispettivamente dalle figure 2, 3, 4 e che assintoticamente (per $t = \infty$) tendono a divenire rette orizzontali.

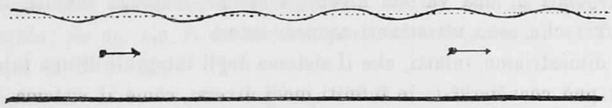

Fig. 2.

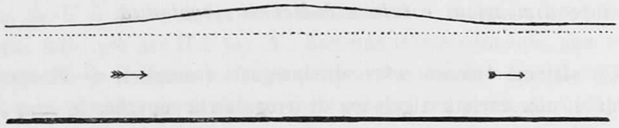

Fig. 3.

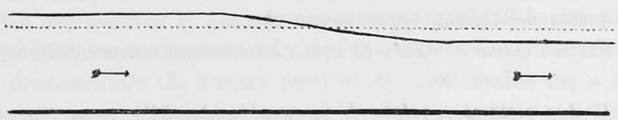

Fig. 4

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In una Nota precedente [1] abbiamo dedotto, per via quasi incidentale, una proposizione relativa alle varietà algebriche con un numero finito di sistemi regolari di integrali riducibili, che caratterizza nettamente il numero di codesti sistemi e la loro configurazione.

Questo nuovo lavoro è dedicato allo studio della configurazione dei sistemi regolari di una varietà algebrica nell'ipotesi che essi siano infiniti, e si dà, a proposito di essa, una prima catena di teoremi generali.

[1] Scorza, *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 445-453].