ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

classe di composti che si chiamano melanine [1]; ma, come si è visto, le analogie che ho riferito sono notevoli, e d'altra parte tutti sono d'accordo nell'ammettere che la formazione di queste sostanze sia dovuta ad un processo di ossidazione. Se una rassomiglianza sussiste, le mie esperienze porterebbero anche una conferma all'ipotesi che Samuely [2] ha formulato alcuni anni or sono, sulla origine di tali composti. Egli ammette infatti che il processo sia diviso in due fasi: 1) La *scissione di composti ciclici dalla molecola albuminoide*, probabilmente in seguito all'azione di fermenti autolitici; 2) La *trasformazione di questi composti ciclici in melanine per azione ossidante di alcuni fermenti.* In alcuni casi il processo può complicarsi per il fatto che anche gruppi accessorî, contenenti zolfo e ferro, possono prendere parte al processo di condensazione. I composti ciclici che si staccano dalle albumine potrebbero quindi essere pirrolo o suoi derivati, i quali successivamente subiscono il processo di ossidazione.

Pubblico con tutto riserbo i risultati delle mie esperienze ancora preliminari, che per diverse ragioni ho dovuto interrompere.

Ringrazio il dott. Luigi Alessandri per il valido aiuto che mi ha prestato nell'esecuzione delle presenti ricerche.

Fisica-matematica. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [3].

In una Nota recentissima [4], avente lo stesso titolo della presente, e pubblicata nel fascicolo 6° (1° sem. 1915) di questi Rendiconti, il prof. Signorini stabilisce l'importante proprietà che « tutte le volte che un filo « conduttore è sede di una propagazione di onde elettromagnetiche, smor- « zate o no (compreso il caso limite che si tratti di un campo stazionario), « in ogni sua sezione normale la resistenza effettiva non è mai inferiore « alla resistenza ohmica, e risulta ad essa sempre eguale allora, e allora « soltanto, che il filo sia cilindrico, il campo stazionario, e la forza elet-

[1] Non sono mancate esperienze dirette a produrre artificialmente le melanine; così p. es. la glucosammina, il triptofano, la sieroalbumina e l'albume d'uovo, per prolungata ebollizione con acidi minerali diluiti forniscono prodotti scuri, neri o bruni (le cosiddette sostanze umiche o melanoidine); inoltre Ducceschi, ossidando la tirosina con clorato, ebbe del pari composti colorati in scuro; ma evidentemente si tratta di reazioni che sono ben diverse da quelle che si compiono negli organismi e che conducono a derivati di tutt'altra natura.

[2] C. Oppenheimer, Handbuch der Biochemie, vol. I, pag. 749.

[3] Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1915.

[4] Dovendo citare, nel seguito, questa Nota, la indicherò con (*S*).

« trica costante in intensità e sempre parallela all'asse del filo (almeno se « si esclude l'esistenza, dentro il conduttore, di correnti di spostamento) ».

La prima parte del teorema si stabilisce assai facilmente (*S*, § 3); per stabilire la seconda parte, il Signorini ricorre a calcoli assai complicati: trasforma le equazioni vettoriali elettrodinamiche (*S*, § 2) introducendo un apposito sistema di coordinate, e poi, operando opportunamente sulle equazioni trovate (*S*, § 4), arriva al risultato.

Ora, si può giungere rapidamente al risultato con calcoli molto brevi, senza introdurre coordinate di sorta, ma operando esclusivamente sulle equazioni vettoriali elettrodinamiche; in tal modo si ottiene, per dir così, automaticamente, senza la più lontana ombra di artificiosità, il risultato voluto; inoltre — com'è carattere peculiare del metodo vettoriale — ogni equazione o trasformazione che si fa, ha un preciso ed immediato significato, meccanico od analitico.

Ciò è mostrato nei paragrafi seguenti, ove i calcoli sono sviluppati per disteso.

Per le citazioni di calcolo vettoriale, mi riferisco all'opera di Burali-Forti e Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel* etc. (Hermann, Paris, an. 1910).

1. Sia C una curva qualunque dello spazio, e per un punto arbitrario P dello spazio conduciamo una normale alla curva C, e diciamo M il suo piede.

Se O è un punto arbitrario di C, e chiamiamo z la lunghezza dell'arco OM, è chiaro che z è una determinata funzione del punto P; se poi indichiamo con $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ i soliti vettori unitarî, diretti rispettivamente secondo la tangente, normale principale e binormale della curva C nel punto M, questi vettori sono funzioni di z e, perciò, anche del punto P.

Chiameremo f e f_1 la flessione e la torsione della curva C in M; anche f, f_1 sono funzioni di z.

Calcoliamo anzitutto il gradiente, rispetto a P, della z.

Basta partire dalla condizione geometrica $(\mathrm{P}-\mathrm{M})\times\mathbf{T}=0$ e differenziarla; avremo così, ricordando una delle formule di Frenet (cfr. *Éléments*, pag. 87),

$$(d\mathrm{P}-\mathbf{T}\,dz)\times\mathbf{T}+(\mathrm{P}-\mathrm{M})\times f\,\mathbf{N}\,dz=0\,,$$

da cui

$$dz=\frac{1}{1-f(\mathrm{P}-\mathrm{M})\times\mathbf{N}}\,\mathbf{T}\times d\mathrm{P}\,,$$

perciò

$$\text{(1)}\qquad \operatorname{grad} z=\frac{1}{1-fx}\,\mathbf{T}\,,$$

avendo posto

(2) $$x = (P - M) \times \mathbf{N} .$$

Calcoliamo ora $\mathrm{rot}_P \mathbf{T}$, $\mathrm{rot}_P \mathbf{B}$, $\mathrm{div}_P \mathbf{T}$. Il calcolo si fa subito, ricorrendo ad alcune formule utilissime che ho dato in altra occasione (1); poichè, come si è già osservato, i vettori $\mathbf{T}, \mathbf{B}$ sono funzioni di s, dalle accennate formule si ha:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{T} = \mathrm{grad}\, s \wedge \frac{d\mathbf{T}}{ds} \quad , \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \mathrm{grad}\, s \wedge \frac{d\mathbf{B}}{ds} ,$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{T} = \mathrm{grad}\, s \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} ,$$

cioè, per le formule di Frenet, e per la (1),

(3) $$\mathrm{rot}\, \mathbf{T} = \frac{f}{1 - fx} \mathbf{B} \quad , \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \frac{f_1}{1 - fx} \mathbf{B} ,$$

(4) $$\mathrm{div}\, \mathbf{T} = 0 .$$

È anche utile calcolare $\mathrm{grad}_P\, x$, nel caso in cui la curva C sia piana; dalla (2), differenziando e applicando una delle formule di Frenet, si ha:

$$dx = (dP - \mathbf{T}\, ds) \times \mathbf{N} - (P - M) \times f\, \mathbf{T}\, ds ,$$

la quale si riduce a $dx = dP \times \mathbf{N}$; perciò:

(5) $$\mathrm{grad}\, x = \mathbf{N} .$$

Se la curva C fosse sghemba, si troverebbe, analogamente,

$$\mathrm{grad}\, x = \mathbf{N} - f_1 (P - M) \times \mathbf{B} \,.\, \mathrm{grad}\, s .$$

2. Consideriamo un'area piana S, che si muove (rigidamente) in guisa che il suo baricentro descriva la curva C, e che il suo piano sia costantemente normale a C. Lo spazio, di forma tubolare, descritto dall'area S, si chiama anche *filo*, e l'area S è una sezione normale di tale filo; la curva C si dice *asse* del filo.

Supponiamo che questo filo, supposto conduttore, sia sede di una propagazione di onde elettromagnetiche; allora, in ogni punto P del filo, i

(1) Cfr. Boggio, *Sul gradiente di una omografia vettoriale* [Rendiconti di questa Accademia, serie 5a, vol. XIX (2° sem. 1910), pag. 389]. Ovvero anche: Burali-Forti et Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*; vol. I, *Transformations linéaires*, pag. 92 [Mattei, Pavia, an. 1912].

vettori **E**, **H** delle forze elettrica e magnetica sono legati dalle equazioni di Heaviside-Herz (cfr. *Éléments*, pp. 163, 164):

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E}=\operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{6}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{7}$$

ove $c, \varepsilon, \sigma, \mu$ sono costanti.

A queste, occorre ancora aggiungere l'equazione:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{8}$$

che esprime che il campo magnetico è solenoidale.

La condizione d'integrabilità div rot $=0$, applicata alle (6), (7), porge:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{E}}{\theta}\right)=0, \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0, \tag{9'}$$

ove $\theta=\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}=$ tempo di rilassamento; è chiaro che la (9′) è identicamente verificata, a causa della (8).

Inoltre, eliminando **H** fra le (6), (7), risulta:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{E}}{\theta}\right)=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{10}$$

Ciò premesso, se si vuole che, in qualunque sezione normale S del filo, la resistenza effettiva sia eguale alla resistenza ohmica, occorre e basta (*S*, § 3) che, in tutti i punti della sezione S, la forza elettrica sia (in ogni istante) normale alla sezione stessa, e vi abbia la medesima intensità.

Queste condizioni si traducono nell'eguaglianza

$$\mathbf{E}=u(z,t)\,\mathbf{T}, \tag{11}$$

ove u è una funzione, da determinarsi, degli argomenti z, t.

Si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{E}}{\theta}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{\theta}\right)\mathbf{T};$$

perciò, sostituendo nella (9), e ricordando la (4), risulta:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{\theta}\right)\times\mathbf{T}=0;$$

e siccome, in generale, $\operatorname{grad} F(z) = \frac{\partial F}{\partial z} \operatorname{grad} z$, si trae, in virtù della (1),

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) = 0. \tag{12}$$

Questa relazione è stata stabilita dal Signorini (S, § 4) con esclusivo riguardo al problema da lui trattato: in particolare, tenendo conto, che, in conseguenza delle ipotesi, risulta $f = 0$. Quanto precede mostra invece che essa deriva unicamente dalla condizione d'integrabilità della (6); si ha così anche il significato analitico di tale equazione.

3. Per trovare un'altra condizione, a cui deve soddisfare la u, basta sostituire il valore (11) nella (10); per ciò calcoliamo intanto $\operatorname{rot} \mathbf{E}$. Dalla (11) risulta:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = u \operatorname{rot} \mathbf{T} + \frac{\partial u}{\partial z} \operatorname{grad} z \wedge \mathbf{T},$$

cioè, per le (1), (3),

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{uf}{1 - fx} \mathbf{B}. \tag{13}$$

Ne segue [cfr. *Éléments*, pag. 68, (2)]:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{uf}{1 - fx} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \\ + \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{uf}{1 - fx}\right) \operatorname{grad} z + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{uf}{1 - fx}\right) \operatorname{grad} x \right\} \wedge \mathbf{B};$$

ricordando la seconda delle (3), e sostituendo nella (10), risulta:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) \mathbf{T} = - \frac{uff_1}{(1 - fx)^2} \mathbf{B} - \\ - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{uf}{1 - fx}\right) \operatorname{grad} z + \frac{uf^2}{(1 - fx)^2} \operatorname{grad} x \right\} \wedge \mathbf{B}. \tag{14}$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\mathbf{B}$, si ha:

$$uff_1 = 0;$$

quindi, lasciando da parte il caso banale di $u = 0$ (in cui si ha senz'altro: $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = \operatorname{grad} \psi$), dovrà essere:

$$f = 0, \quad \text{ovvero} \quad f_1 = 0.$$

Se $f = 0$, la curva C è una linea retta, perciò il filo è cilindrico; la (14) fornisce allora

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) = 0, \tag{15}$$

inoltre dalle (13), (7) risulta

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{16}$$

la seconda delle quali mostra di nuovo che la (9') è identicamente verificata.

Se invece $f_1 = 0$, la curva C è piana, e la (14), moltiplicata scalarmente per $\mathbf{T}$, porge, ricordando le (1), (5),

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta}\right) = -\frac{uf^2}{(1-fx)^2}$$

ma u ed f sono indipendenti da x; perciò questa relazione, dovendo essere verificata qualunque sia x, fornisce $f = 0$, e ricadiamo perciò nel caso del filo cilindrico; si conclude quindi che sussistono ancora le (15), (16).

Dalle (12), (15) segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta} = h,$$

ove h è una costante arbitraria; integrando ancora, risulta:

$$u(z, t) = h + k_z\, e^{-t/\theta},$$

k_z essendo una funzione arbitraria di z. In tal modo abbiamo l'espressione della funzione u, e quindi del vettore $\mathbf{E}$, che avrà direzione fissa.

Dopo ciò, si ha dalla (6):

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\, h\,\mathbf{T},$$

da cui, $\mathbf{T}$ essendo costante,

$$\mathbf{H} = \text{grad}\,\psi + \frac{2\pi\sigma}{c}\, h\,\mathbf{T} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{M}),$$

ove ψ è una funzione numerica (indipendente da t), che deve soddisfare, per la (8), all'equazione

$$\text{div grad}\,\psi = 0.$$

In tal modo abbiamo l'espressione del vettore $\mathbf{H}$.

Se escludiamo l'esistenza, nel conduttore, di correnti di spostamento, vuol dire che $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ deve ritenersi nulla, e la (15) si riduce a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, perciò il campo risulta stazionario.

Osservazione. — Limitandosi, fin da principio, alla considerazione di campi elettromagnetici stazionarî, si può arrivare, in modo assai semplice, a determinare le condizioni sotto cui accade che la resistenza effettiva coincida colla resistenza ohmica. Infatti, se il campo è stazionario, detto φ il suo potenziale scalare, sarà $E = \text{grad}_P\, \varphi$. D'altra parte, E deve avere la forma (11) con u indipendente da t; perciò il potenziale φ dovrà dipendere solo da z, e allora avremo

$$E = \frac{d\varphi}{dz} \text{grad}\, z = \frac{1}{1 - fx} \frac{d\varphi}{dz} T;$$

ed è chiaro che il coefficiente di T riesce indipendente da x, solo se $f = 0$. Ciò porta immediatamente a conclusioni che coincidono con quelle del paragrafo precedente, riferite al caso limite $\theta = 0$.

Fisica. — *Sull'attrito interno del nickel in campo magnetico variabile* (¹). Nota preliminare del prof. Ernesto Drago, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

1. Lo studio dello smorzamento delle oscillazioni dei corpi elastici costituisce un mezzo di sensibilità sovente grandissima per rivelare le modificazioni (²) fisico-chimiche interne che possono prodursi nella materia allo stato solido, ed è necessario di prendere in considerazione nella spiegazione dell'attrito interno non solo i fenomeni di agitazione molecolare, ma anche quelli d'orientazione molecolare che caratterizzano essenzialmente il magnetismo.

Brown (³) ha trovato che l'attrito interno di un filo di nickel ricotto aumenta in un campo magnetico costante crescente fino a 20 gauss, poi diminuisce, fino a prendere lo stesso valore che ha in campo magnetico nullo, in un campo di 80 gauss; e diventa dopo sempre più piccolo in campi magnetici costanti crescenti fino a 200 gauss.

Riguardo all'influenza del campo magnetico alternato lo stesso autore (⁴), ricordando le mie precedenti ricerche relative all'azione del campo magnetico alternato sulla rapidità di smorzamento delle oscillazioni torsionali di fili di ferro (⁵), ha fatto recentemente esperienze, mostrando che un campo magnetico alternato di 13 gauss diminuisce anche l'attrito interno di un filo di nickel ricotto sottoposto ad una carica di $0,5 \times 10^5$ gr. per cm.², e

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

(²) M. Guye, Journal de physique 1912, pag. 260.

(³) The scientific proceedings of the Royal Dublin Society, vol. XIII, aprile 1911, pag. 35.

(⁴) Idem. febbraio 1914, pag. 215.

(⁵) Nuovo Cimento, febbraio 1912, pag. 73.