ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Meccanica celeste. — *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili.* Nota del Socio P. Pizzetti [1].

L'ing. Armellini ha trattato questo problema in una serie di Note pubblicate in questi Rendiconti, negli anni 1911, 1913, 1914, e riassunte e completate in una bella Memoria venuta alla luce or sono pochi mesi [2]. Egli ha, con abile e fruttuosa analisi, poste in evidenza talune proprietà del movimento in questione, studiata la integrazione per serie delle equazioni differenziali, e dato un metodo, generalmente approssimato, per la determinazione effettiva del movimento stesso. Aggiungo in questa Nota alcuni ulteriori sviluppi per quanto riguarda quest'ultimo lato del problema.

1. Detta $M(t)$ la somma delle due masse al tempo t, dette r e θ le coordinate polari (nel piano dell'orbita relativa) di uno dei due corpi, rispetto all'altro come polo e rispetto ad un asse polare di direzione invariabile, dalle consuete equazioni differenziali si deducono le note formole

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c\,, \qquad (c = \textit{costante}) \tag{1}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{f\,M(t)}{r^2}\,. \tag{2}$$

Osservando poi che, in virtù della (1), si ha

$$\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{1}{c}\,\frac{dr}{dt}\;, \qquad \frac{d^2\,\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{r^2}{c^2}\,\frac{d^2r}{dt^2}\,,$$

dalla (2) otteniamo

$$\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{f\,M(t)}{c^2} = 0\,. \tag{3}$$

È questa l'equazione differenziale della quale opportunamente si è valso l'Armellini nell'ultima parte della citata Memoria.

2. *Equazione della traiettoria.* — Poniamo

$$\frac{f}{c^2}\,[M(t) - M_0] = \varphi\,, \tag{4}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1915.

[2] *Il problema dei due corpi di masse variabili.* Memorie della Società italiana dei XL, ser. 3ª, tomo XIX.

e scriviamo quindi la (3) sotto la forma

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2} - \varphi = 0 \,,$$

ove M_0 è il valore di $\mathrm{M}(t)$ per $t = 0$. Coi noti metodi elementari per la integrazione delle equazioni lineari $\left(\text{ove si consideri come funzione incognita la } \frac{1}{r} - \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2}\right)$ otteniamo, dalla precedente equazione:

$$\frac{1}{r} - \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2} = \mathrm{A}_0 \operatorname{sen} \theta + \mathrm{B}_0 \cos \theta + \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta - \tau)\, d\tau \,, \tag{5}$$

ove A_0 e B_0 sono costanti arbitrarie, e dove φ_τ esprime ciò che diviene la φ quando, pensandola come funzione della anomalia θ, si immagini, nella espressione di una tal funzione, sostituita la lettera τ alla θ.

Se facciamo passare l'asse polare per un perielio o per un afelio, dovrà essere $\frac{dr}{d\theta} = 0$, per $\theta = 0$; il che esige, com'è facile verificare derivando la (5) rispetto a θ, che sia $\mathrm{A}_0 = 0$. Indicando poi con

$$\frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2}(1 + e_0)$$

il valore di $\frac{1}{r}$ per $\theta = 0$, la (5) potrà scriversi

$$\frac{1}{r} = \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2}(1 + e_0 \cos \theta) + \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta - \tau)\, d\tau \,. \tag{6}$$

Il 1° termine del 2° membro esprime l'inverso del raggio vettore nell'ordinario moto kepleriano; il 2° termine esprime quindi la perturbazione che, nel valore di $\frac{1}{r}$, è dovuta all'incremento della massa.

Il moto kepleriano, che si assume come paragone, è quello pel quale la massa ha il valor costante M_0, e che col moto effettivo che si studia ha in comune la costante c delle aree, il valore del raggio vettore, e la direzione del movimento (e quindi anche la grandezza della velocità) per $\theta = 0$.

Possiamo ora dimostrare che, se la $\mathrm{M}(t)$ è crescente con t, il *detto 2° termine è positivo* per θ crescente: vale a dire, *per un dato valore positivo dell'anomalia, il raggio vettore è più piccolo nel caso del moto perturbato che non in quello del moto kepleriano.*

Poniamo $\theta - \tau = z$; avremo, indicando con ε l'ultimo termine della (6),

$$\varepsilon = \int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta - \tau) \,.\, d\tau = \int_0^\theta \varphi_{\theta - z} \operatorname{sen} z \,.\, dz \,. \tag{7}$$

Osserviamo, innanzi tutto, che, essendo $M(t)$ crescente con t, sarà φ positiva per valori positivi di θ (supponiamo la c positiva e quindi θ crescente con t), e di più la φ_τ sarà crescente con τ, epperò la $\varphi_{\theta - z}$ decrescente al crescere di z.

Se $\theta \leq \pi$, la ε è certamente positiva.

Se $\pi < \theta \leq 2\pi$, l'integrale nella (7) si può spezzare in due: il primo, formato di elementi positivi, fra 0 e π; il secondo, formato di elementi negativi, fra π e θ; per la osservazione fatta rispetto alla φ, gli elementi negativi del secondo integrale saranno minori, in valore assoluto, di altrettanti del primo integrale. Anche in questo caso sarà dunque $\varepsilon > 0$.

Se fosse $\theta = 2n\pi + \gamma$ (n intero > 0 , $\gamma < 2\pi$), l'integrale si potrà spezzare in $n + 1$ intervalli

$$(0\,,\,2\pi)\,(2\pi\,,\,4\pi) \ldots (2n\pi\,,\,2n\pi + \gamma)\,,$$

ciascuno dei quali risulterà composto di una parte positiva e di una negativa, della quale ultima il valore assoluto sarà inferiore a quello della prima. In ogni caso, dunque, sarà $\varepsilon > 0$; con che il teorema è dimostrato.

La (6) si presta alla risoluzione di problemi riguardanti il massimo influsso degli accrescimenti della massa, qualunque sia la legge colla quale questi accrescimenti si verificano. Possiamo p. es. chiederci quale massima perturbazione, nel valore di $\frac{1}{r}$, può aver luogo, durante una intera rivoluzione, per effetto di una variazione totale (positiva) ΔM nella massa. Nella espressione di ε porremo $\theta = 2\pi$, e per φ porremo il limite superiore $f \,.\, \frac{\Delta M}{c^2}$. Otterremo un limite superiore di ε sopprimendo gli elementi negativi dell'integrale, ossia limitando l'integrazione fra π e 2π; con ciò risulterà

$$\varepsilon < \pi f \frac{\Delta M}{c^2} = \frac{\pi}{R_2(1 + e_0)} \frac{\Delta M}{M_0} = \varepsilon_1 \,. \tag{7'}$$

Il che è quanto dire (trascurando l'effetto della eccentricità) che la perturbazione *unitaria* nel raggio vettore non può superare (nel tempo di una rivoluzione) 3,15 del rapporto fra l'accrescimento della massa e la massa iniziale.

3. Se supponiamo l'incremento della massa espresso in funzione dell'anomalia θ, la (6) dà senz'altro l'equazione della traiettoria, come l'Armellini

ha osservato. In particolare, se si suppone l'incremento proporzionale alla anomalia θ, si dovrà nella (6) porre $\varphi_\tau = \gamma\tau$ e si otterrà

$$(8) \qquad \frac{1}{r} = \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2}(1 + e_0 \cos\theta) + \gamma(\theta - \operatorname{sen}\theta)\,.$$

Derivando rispetto a θ, si vede subito che la derivata si annulla per valori di θ uguali a multipli interi di 2π: il che esprime che un tal modo di variazione della massa non altera la direzione dei perielii, i quali restano invariati nelle successive rivoluzioni [1].

4. *Determinazione dei perielii e degli afelii.* — Annullando la derivata di r rispetto a θ, otteniamo l'equazione che, teoricamente, determina la direzione dei perielii e degli afelii. Osservando che la derivata dell'integrale rispetto al limite superiore, nel secondo membro della (6), è identicamente nulla, otteniamo l'equazione:

$$(9) \qquad \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2} e_0 \operatorname{sen}\theta - \int_0^\theta \varphi_\tau \cos(\theta - \tau)\, d\tau = 0\,.$$

La determinazione effettiva dei valori di θ non può, naturalmente, ottenersi, se non quando si supponga nota la φ in funzione di θ. Si può tuttavia osservare che, a meno che l'integrale non sia esattamente nullo per $\theta = n\pi$ (come nel caso contemplato al n. 3), *lo spostamento angolare degli apsidi può essere molto rilevante quando la eccentricità e_0 sia piccola.*

Si può ancora assegnare un limite superiore alle variazioni degli apsidi durante una intera rivoluzione quando si ammetta a priori che tali variazioni non superino un angolo retto. Supponiamo che sia $\Delta\mathrm{M}$ l'accrescimento totale della massa, mentre l'anomalia varia da zero fino ad un certo valore Θ arbitrariamente scelto (p. es., un po' maggiore di 2π). In questo intervallo

[1] Per ottenere il risultato approssimato del sign. Lehman-Fihles citato dall'Armellini, occorre osservare che, trascurando quantità piccole del 2° ordine rispetto ad e_0 e γ, la (8) può scriversi

$$\frac{1}{r} = \frac{f\mathrm{M}_0}{c^2}\left(1 + e_0\cos\theta - \frac{\gamma c^2}{f\mathrm{M}_0}\operatorname{sen}\theta\right)\left(1 + \frac{\gamma c^2}{f\mathrm{M}_0}\theta\right).$$

Sostituendo, sempre per approssimazione, all'ultima parentesi l'espressione $\dfrac{1}{1-\varepsilon t}$, dove ε è una costante, si ha il risultato enunciato del Lehman-Fihles, vale a dire che la traiettoria appare un ellisse il cui parametro diminuisce proporzionalmente al tempo. Ma questa approssimazione ha il difetto di far apparire spostata la direzione del perielio, il che in realtà non è. Del resto mi sembra assai poco chiaro il parlare di *una traiettoria, della quale un parametro varia col tempo.* Ciò non serve nè a definire geometricamente la traiettoria, nè a dare la legge del movimento. Faccio eccezione, ben inteso, per le così dette orbite osculatrici, delle quali il significato meccanico è ben definito, e la applicazione astronomica molto importante.

sarà $f \dfrac{\Delta M}{c^2}$ il massimo valore della φ_τ: e quindi, posto, nella (9), $2\pi + \vartheta$ in luogo di θ, sarà

$$(\pi + \vartheta) f \frac{\Delta M}{c^2}$$

il massimo valore assoluto dell'integrale che vi figura.

Avremo pertanto $\left(\text{nella ipotesi } \vartheta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ un limite superiore dello spostamento angolare ϑ del perielio, risolvendo l'equazione

$$e_0 \operatorname{sen} \vartheta = (\pi + \vartheta) \frac{\Delta M}{M_0} .$$

Affinchè un tal calcolo sia valido, occorrerà, naturalmente, che il valore trovato di $2\pi + \vartheta$ sia non maggiore dell'intervallo Θ scelto *a priori*. Altrimenti bisognerà ricominciare il calcolo con un valore più grande di Θ.

5. *Relazione fra il tempo e l'anomalia.* — Indichiamo con t e T i tempi che, nel moto effettivo e nel kepleriano rispettivamente, occorrono per far variare l'anomalia da 0 a θ, e cerchiamo un limite superiore della differenza $t - T$, sempre nella ipotesi che la massa totale sia crescente. Dalla (1) abbiamo

$$T - t = \frac{1}{c} \int_0^\theta (R^2 - r^2)\, d\theta , \tag{11}$$

ove

$$R = \frac{c^2}{f M_0 (1 + e_0 \cos \theta)}$$

è l'espressione del raggio vettore nel moto kepleriano. Scrivendo la (6) sotto la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \varepsilon ,$$

ed osservando che

$$R^2 - r^2 = r^2 R^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) ,$$

la (11) potrà scriversi

$$T - t = \frac{1}{c} \int_0^\theta \varepsilon r^2 R^2 \left(\frac{2}{R} + \varepsilon\right) d\theta .$$

Chiamiamo R_1 R_2 il massimo ed il minimo valore di R nell'intervallo $(0, \theta)$, ε_1 il massimo di ε determinato come al § 2 [formola (7′)]. Avremo, ricordando che $r < R$, e che $\varepsilon > 0$,

$$T - t < \frac{R_1^4}{c} \left(\frac{2}{R_2} + \varepsilon_1\right) \int_0^\theta \varepsilon\, d\theta . \tag{12}$$

Introducendo per ε la sua espressione $\int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}(\theta-\tau)\, d\tau$, si verifica facilmente che

$$\int_0^\theta \varepsilon\, d\theta = \int_0^\theta \varphi_\tau \{1-\cos(\theta-\tau)\}\, d\tau .$$

Infatti queste due espressioni si annullano entrambe per $\theta=0$, e le loro derivate rispetto a θ sono eguali. Avremo dunque

$$\mathrm{T}\quad t < \frac{2\,\mathrm{R}_1^4}{c}\left(\frac{2}{\mathrm{R}_2}+\varepsilon_1\right)\int_0^\theta \varphi_\tau \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\theta-\tau)\, d\tau .$$

Sia $\Delta\mathrm{M}$ la massima variazione della massa totale durante una intera rivoluzione. Posto $\theta=2\pi$, sarà $2\pi f\dfrac{\Delta\mathrm{M}}{c^2}$ un limite superiore dell'integrale nell'ultima formola, e quindi l'espressione

$$\frac{4\pi\mathrm{R}_1^4}{c^3}\left(\frac{2}{\mathrm{R}_2}+\varepsilon_1\right)f\,.\,\Delta\mathrm{M} \tag{13}$$

darà *un limite superiore della perturbazione che, nella durata di una intera rivoluzione, è dovuta all'accrescimento della massa.*

Se si indica con a il semigrand'asse, e con T il periodo della orbita kepleriana, si ha

$$c^2 = f\mathrm{M}_0\, a(1-e_0^2) \qquad c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e_0^2}}{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{R}_1 = a(1+e_0) \qquad \mathrm{R}_2 = a(1-e_0)\,.$$

La (13) può quindi scriversi

$$\frac{2\mathrm{T}(1+e_0)^4}{(1-e_0^2)^{3/2}}\left(\frac{2}{1-e_0}+\varepsilon_1\, a\right)\frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0}$$

ovvero, se si trascura l'eccentricità e, nella parentesi, il termine $\varepsilon_1 a$, risulta

$$\mathrm{T}-t < 4\mathrm{T}\,\frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}_0}\,.$$

Così per un incremento, poniamo, di un milionesimo della massa, il periodo resta alterato di meno di 4 milionesimi del proprio valore.