ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

dalla corona: quindi di un fenomeno affatto diverso da quello della nuova zona rossa coronale. Non ostante la brevità del tempo nella osservazione della eclisse che generalmente diminuisce la ponderazione, è difficile di ammettere che in passato abili osservatori non si siano accorti di una riga o zona rossa sensibilmente più refrangibile della riga C.

Matematica. — *Sulle vibrazioni di un filo elastico disteso su di una superficie levigata.* Nota di Bartolomeo Tassara, presentata dal Corrispondente O. Tedone [1].

1. Il dott. F. Sbrana [2] ha dato una soluzione generale del problema delle vibrazioni di una corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente. Ed è pervenuto a questa soluzione servendosi della formula che il metodo di Riemann fornisce per l'integrale generale dell'equazione indefinita del problema, che è un caso particolare dell'equazione a derivate parziali lineare del 2° ordine, con due variabili indipendenti e a coefficienti costanti.

In questa Nota vogliamo far vedere che il problema precedente può interpretarsi anche come quello delle vibrazioni trasversali di un filo elastico omogeneo disteso su di una superficie levigata a curvatura costante, o almeno tale lungo la linea che è figura di equilibrio del filo. Basterà perciò far vedere che le equazioni indefinite dei due problemi coincidono.

2. Sia

$$f(x\,,y\,,z)=0 \tag{1}$$

l'equazione di una superficie levigata sulla quale sia disteso un filo flessibile qualunque, e sulla quale questo filo debba rimanere continuamente durante il suo movimento. Supporremo, come al solito, che le forze esterne applicate all'elemento ds del filo possano essere sostituite da un'unica forza dell'ordine di grandezza di ds stesso, applicata ad un suo punto arbitrario e di componenti $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ secondo i tre assi coordinati x, y, z. Inoltre, se con λ indichiamo una indeterminata, le componenti secondo gli stessi tre assi dell'azione della superficie sullo stesso elemento della linea si possono scrivere:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\quad,\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\quad,\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1915.

[2] Vedi Sbrana, *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 3° e 5°.

Le equazioni del movimento del filo saranno quindi:

$$
(2)\qquad \begin{cases}
\mu \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\dfrac{\partial x}{\partial s}\right) + \mathrm{X} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}\,, \\[2ex]
\mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\dfrac{\partial y}{\partial s}\right) + \mathrm{Y} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}\,, \\[2ex]
\mu \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\dfrac{\partial z}{\partial s}\right) + \mathrm{Z} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z}\,,
\end{cases}
$$

dove con μ indichiamo la densità del filo.

Alle equazioni precedenti, perchè il problema del movimento sia determinato, bisogna aggiungere le condizioni agli estremi della linea a la condizione $ds = \text{cost}$, se il filo è inestendibile, o una data relazione $\mathrm{T} = f(\theta)$ fra T e la dilatazione θ che subisce l'elemento ds filo, se il filo stesso è elastico.

Introducendo la nuova variabile t_1 per mezzo dell'equazione $\mathrm{T} = \dfrac{ds}{dt_1}$, potremo dare alle (2) la forma

$$
(2')\qquad \begin{cases}
\mu \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mathrm{T}} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \mathrm{X} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Se poi indichiamo con u e v un sistema di coordinate curvilinee qualunque sulla superficie (1), per modo che il quadrato dell'elemento lineare di questa superficie assuma la forma

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2\,,$$

ed indichiamo la forza viva unitaria relativa all'elemento ds con

$$(3)\qquad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}(x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{E}\,u_t'^2 + 2\,\mathrm{F}\,u_t' v_t' + \mathrm{G}\,v_t'^2)$$

e con τ l'espressione analoga

$$(4)\qquad \tau = \tfrac{1}{2}(x_{t_1}'^2 + y_{t_1}'^2 + z_{t_1}'^2) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{E}\,u_{t_1}'^2 + 2\,\mathrm{F}\,u_{t_1}' v_{t_1}' + \mathrm{G}\,v_{t_1}'^2)\,,$$

dove

$$x_t' = \frac{\partial x}{\partial t}\,,\ y_t' = \frac{\partial y}{\partial t}\,,\ z_t' = \frac{\partial z}{\partial t}\,,\ u_t' = \frac{\partial u}{\partial t}\,,\ v_t' = \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$x_{t_1}' = \frac{\partial x}{\partial t_1}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ u_{t_1}' = \frac{\partial u}{\partial t_1}\,,\ \ldots\,,$$

al posto delle (2) o (2′) si possono ancora sostituire le altre

$$
(5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u'_t}-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u}\right]=\frac{1}{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\,\frac{\partial\tau}{\partial u'_{t_1}}-\frac{\partial\tau}{\partial u}\right]+\mathrm{Q}u\,,\\
&\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial v'_t}-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial v}\right]=\frac{1}{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\,\frac{\partial\tau}{\partial v'_{t_1}}-\frac{\partial\tau}{\partial v}\right]+\mathrm{Q}v\,,
\end{aligned}\right.
$$

dove

$$
\mathrm{Q}u=\mathrm{X}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\mathrm{Y}\,\frac{\partial y}{\partial u}+\mathrm{Z}\,\frac{\partial z}{\partial u}\quad,\quad \mathrm{Q}v=\mathrm{X}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\mathrm{Y}\,\frac{\partial y}{\partial v}+\mathrm{Z}\,\frac{\partial z}{\partial v}\,.
$$

Nelle equazioni (5) la indeterminata λ risulta eliminata; ed in esse le incognite sono, ora, u e v.

3. Supponiamo che il filo sia teso e fissato agli estremi sulla superficie e non soggetto a forze esterne. Nella posizione di equilibrio, come è noto, il filo si distende secondo una geodetica della superficie. Scegliamo allora per coordinate curvilinee su di essa le geodetiche ortogonali alla geodetica L, posizione di equilibrio del filo, e che chiameremo linee v, e per linee coordinate u le loro traiettorie ortogonali.

Assumiamo a parametro u l'arco delle geodetiche v contato a partire dalla L, che sarà quindi la $u=0$, e a parametro v l'arco della L contato da un suo punto fisso.

È noto, allora, che il quadrato dell'elemento lineare della superficie assumerà la forma

$$
ds^2=du^2+\mathrm{G}\,dv^2
$$

con

$$
(\sqrt{\mathrm{G}})_{u=0}=1\quad,\quad\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)_{u=0}=0\ \text{(1)}.
$$

Si avrà così

$$
(6)\qquad \mathfrak{T}=\tfrac{1}{2}\,(u'^2_t+\mathrm{G}\,v'^2_t)\,,
$$

$$
(7)\qquad \tau=\tfrac{1}{2}\,(u'^2_{t_1}+\mathrm{G}\,v'^2_{t_1})\,.
$$

Tenendo poi conto che, per essere le forze esterne nulle, $\mathrm{Q}u=0$, $\mathrm{Q}v=0$, ed introducendo nuovamente il parametro s al posto di t_1, le (5) si riducono a

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{T}\,\frac{\partial u}{\partial s}\right)-\frac{\mathrm{T}}{2}\,\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2,\\
&\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{G}\,\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{TG}\,\frac{\partial v}{\partial s}\right)-\frac{\mathrm{T}}{2}\,\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2.
\end{aligned}\right.
$$

(1) Vedi Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, ed. 1894, cap. VI, pp. 154 e 179.

4. Supponiamo, ora, che il filo sia elastico e che compia soltanto delle vibrazioni infinitesime attorno alla sua posizione di equilibrio, in modo che sia soddisfatta la legge di Hooke, che cioè la tensione del filo sia proporzionale alla dilatazione che essa produce nel filo stesso. Indicati allora con δu e δv gli incrementi che le coordinate di un punto qualunque del filo subiscono nel passaggio dalla posizione di equilibrio a quella di movimento, ad un dato istante, e con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ le coordinate del medesimo punto allo stesso istante, si avrà:

$$\bar{u} = \delta u \quad , \quad \bar{v} = v + \delta v \, .$$

Se poi indichiamo con T_0 il valore costante di T nella posizione di equilibrio, e con δT l'incremento che subisce la tensione stessa quando il filo passa dalla sua posizione di equilibrio a quella di movimento, si avrà pure:

$$T = T_0 + \delta T = T_0 + k^2 \theta \, ,$$

con k costante, e θ essendo la dilatazione che un elemento ds del filo subisce nel passare dalla posizione di equilibrio a quella di movimento. Si può osservare che

$$\theta = \frac{\sqrt{(d\,\delta u)^2 + (dv + d\,\delta v)^2} - dv}{dv} \, ,$$

e quindi, trascurando infinitesimi di ordine superiore,

$$\theta = \frac{\partial\, \delta v}{\partial v} \; ;$$

e per T abbiamo

$$T = T_0 + k^2 \frac{\partial\, \delta v}{\partial v} \, . \tag{9}$$

Osserviamo ancora che, per una nota formola di geometria differenziale, indicata con K la curvatura totale della superficie, si ha, nel nostro caso,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \, ,$$

e perciò, lungo la linea $u = 0$,

$$K = -\left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \right)_{u=1} \, .$$

Sviluppando $\sqrt{G}$ nell'intorno del valore $u = 0$, in serie di Maclausin, si ha allora

$$\sqrt{G} = 1 - \tfrac{1}{2} K u^2 + \cdots$$

e quindi

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
G &= 1 - K u^2 + \cdots \\
\frac{\partial G}{\partial u} &= -2 K u + \cdots \\
\frac{\partial G}{\partial v} &= -\frac{\partial K}{\partial v} u^2 + \cdots
\end{aligned}
\right.
$$

dove i membri stanno a rappresentare termini di ordine superiore.

Sostituendo, nelle equazioni (8) del movimento, δu al posto di u e $v + \delta v$ al posto di v, per T il suo valore dato dalla (9), per G e le sue derivate le loro espressioni date dalle (10); tenendo conto che $ds = dv$ a meno di infinitesimi di ordine superiore, e tenendo conto soltanto dei termini di 1° ordine, si avrà

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} &= T_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial v^2} + K T_0 \delta u , \\
\mu \frac{\partial^2 \delta v}{\partial t^2} &= k^2 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial v^2} .
\end{aligned}
\right.
$$

Se perciò supponiamo che la curvatura della superficie data (1) sia costante, o almeno tale sia lungo la linea posizione di equilibrio del filo, la 1ª delle equazioni trovate (11) coinciderà con l'equazione indefinita del problema delle vibrazioni di una corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente. Possiamo anzi osservare che il nostro problema presenta una maggiore generalità di quella del problema accennato, potendo la curvatura K essere positiva o negativa per quanto il metodo dato dallo Sbrana per risolvere il suo problema basti a risolvere il nostro in ogni caso. La 2ª delle (11) è l'equazione, molto nota, delle vibrazioni di una corda elastica tesa nel vuoto.