ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *La risoluzione meccanica esatta delle equazioni differenziali lineari generali di 2° ordine.* Nota del Corrispondente E. PASCAL.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le equazioni differenziali e l' integrazione delle trasformazioni.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una precedente Nota [1], abbiamo definito l' integrazione delle trasformazioni e mostrato la connessione di tale operazione con la teoria delle equazioni differenziali.

In questa mostreremo l'applicazione di tali concetti, ricavando degli speciali tipi di equazioni, e dedurremo alcune conseguenze d' indole generale.

1. Consideriamo il gruppo di trasformazioni lineari fratte

$$(1) \qquad z_1 = \frac{a z + b}{c z + 1} \qquad (a,\, b,\, c \text{ qualunque}).$$

Conformemente a ciò che avevamo supposto nella precedente Nota, la sostituzione degenere $z_1 = 0$ si ottiene con la matrice di trasformazione $0 \equiv (0\,,0\,,0)$; la sostituzione identica invece ha la matrice $(a\,b\,c) \equiv (1\;0\;0)$.

Supponiamo perciò che le $a\,, b\,, c\,, z\,, z_1$ dipendano da una variabile x ed integriamo tale trasformazione fra i limiti x_0 ed x.

Per quanto è stato detto nella prima Nota, dovremo formare il prodotto delle sostituzioni aventi le matrici

$$\Big(1 + h\,a(x_0 + mh)\;,\; h\,b(x_0 + mh)\;,\; h\,c(x_0 + mh)\Big) \quad \begin{cases} m = 0\,,\ldots,\,n-1 \\ h = \dfrac{x - x_0}{n} \end{cases}$$

passando poi al limite per $n = \infty$.

Ciò che equivale a porre

$$(2) \qquad z(x + h) = \frac{\big(1 + h\,a(x)\big)\,z(x) + h\,b(x)}{h\,c(x)\cdot z(x) + 1} = f(h\,,x\,,z)$$

e passare al limite per $h = 0$.

[1] Questi Rendiconti, vol. XXV, 1° sem. 1916.

Ora, se noi sviluppiamo la frazione in serie di Taylor rispetto ad h, troveremo che

$$z(x+h)=f(0)+hf'(0)+\varepsilon,$$

ove ε denota un infinitesimo d'ordine maggiore o eguale a due, ed $f(0)$ e $f'(0)$ sono la f e la sua derivata rispetto ad h, per $h=0$.

Eseguendo i calcoli, si trova

$$z(x+h)=z(x)+h\,\{a(x)\,z(x)+b(x)-c(x)\,z^2\}+\varepsilon;$$

da cui, portando $z(x)$ a sinistra, dividendo per h, e passando al limite per $h=0$, avremo

$$\frac{dz}{dx}=-c(x)\,z^2+a(x)\,z+b(x),$$

poichè $\lim\frac{\varepsilon}{h}=0$.

E questa è appunto l'equazione di Riccati: *tutte le sue note proprietà dipendono semplicemente dal fatto che essa equivale all'integrazione di una trasformazione lineare fratta.*

Infatti, le trasformazioni (1) ammettono, come invariante assoluto, il birapporto

$$\frac{z'-z''}{z'-z^{\mathrm{IV}}}\cdot\frac{z'''-z^{\mathrm{IV}}}{z'''-z''}.$$

Quindi, dalle (2) si ricava che il birapporto delle z nel punto x_0 è eguale a quello nel punto $x_0+h, x_0+2h, \ldots, x_0+nh=x_1$; cioè ritroviamo la proprietà fondamentale e caratteristica dell'equazione di Riccati.

Notiamo poi anche che, introducendo variabili omogenee $z=\frac{\zeta}{\eta}$, le (1) ci dànno

$$\begin{cases}\zeta_1=\varrho(a\zeta+b\eta)\\ \eta_1=\varrho(c\zeta+\ \eta)\end{cases}\qquad (\varrho=\text{funz. arbit. di } x).$$

Come è noto, l'integrazione di queste trasformazioni lineari intere, ci conduce alle equazioni differenziali lineari; quindi, ponendo $z=\frac{\zeta}{\eta}$, nelle equazioni di Riccati dovremo trovare delle equazioni lineari.

Infatti, avremo

$$\frac{\zeta'\eta-\eta'\zeta}{\eta^2}=-\frac{c\zeta^2}{\eta^2}+\frac{a\zeta}{\eta}+b,$$

da cui, per $\eta\neq 0$, si trae

$$(\zeta'-b\eta+(k-a)\zeta)\,\eta-(\eta'-c\zeta+k\eta)\,\zeta=0\qquad (k \text{ funz. arbit.})$$

che è soddisfatta da

$$\begin{aligned} \zeta' &= (a-k)\,\zeta + b\eta \\ \eta' &= c\,\zeta - k\eta\,. \end{aligned}$$

Reciprocamente, si vede la ragione per cui il rapporto d'una coppia-soluzione del sistema ora scritto (il più generale del secondo ordine, come si vede) soddisfi all'equazione di Riccati.

2. In un modo perfettamente simile si possono ottenere nuovi tipi di equazioni, più generali, e godenti di proprietà simili.

Consideriamo il gruppo delle trasformazioni lineari fratte a due variabili (ciò che diremo si estende subito al caso di n), definito dalle

$$(3) \qquad y_1 = \frac{ay + bz + c}{my + nz + p} \quad , \quad z_1 = \frac{dy + ez + f}{my + nz + p}\,;$$

il quale, con l'introduzione delle variabili omogenee $y = \dfrac{\eta}{\xi}$, $z = \dfrac{\zeta}{\xi}$, può ridursi al gruppo lineare omogeneo

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= (a\eta + b\zeta + c\xi)\,\varrho \\ \zeta_1 &= (d\eta + e\zeta + f\xi)\,\varrho \\ \xi_1 &= (m\eta + n\xi + \ \ \xi)\,\varrho \end{aligned} \right. \qquad (\varrho \text{ funz. arbit.})$$

Se ora consideriamo il caso che tutte le variabili sieno funzioni di x, e fissiamo le formole di trasformazione

$$(5) \; \frac{\big(1 + h\,a(x)\big)\,y(x) + hbz + hc}{hmy + hnz + 1}\;;\; z(x+h) = \frac{hdy + (1 + he)\,z + hf}{hmy + hnz + 1}\,,$$

avremo che il prodotto (destro o sinistro) delle n trasformazioni ottenute ponendo $x = x_0 + mh$, $h = \dfrac{x_1 - x_0}{n}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, per n tendente all'infinito, è l'integrale della trasformazione lineare fratta (3); ed il valore, che in x_1 assumono la y e la z, è precisamente il valore d'una coppia integrale d'una certa equazione differenziale.

Per trovare questa equazione, sviluppiamo i secondi membri delle (5) in serie di Taylor rispetto ad h; avremo

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h\,\{ay + bz + c - y(my + nz)\} + \varepsilon' \\ z(x+h) &= z(x) + h\,\{dd + ez + f - z(my + nz)\} + \varepsilon' \end{aligned}$$

ove ε', ε'' sono infinitesimi d'ordine superiore rispetto ad h.

Da queste formole, trasportando $y(x)$, $z(x)$ a sinistra, dividendo per h e passando al limite, troviamo

$$(6)\qquad \begin{cases} y'(x) = ay + bz + c - y(my + nz) \\ z'(x) = dy + ez + f - z(my + nz). \end{cases}$$

D'altra parte, notiamo che l'integrazione delle (4) ci porta ad un sistema d'equazioni differenziali lineari con le η, ζ, ξ, il più generale possibile. Quindi possiamo dire che

Date tre funzioni soddisfacenti ad un sistema lineare del 3° ordine, il rapporto di due di esse alla terza soddisfa la (6), *deducibile direttamente dal sistema lineare dato.*

È agevole la verifica diretta di questa proprietà, simile a quella dell'equazione di Riccati.

3. Osserviamo che le (4) ammettono l'invariante

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \Delta(1\,2\,3)$$

ove le η_1, ζ_1, ξ_1; η_2, ζ_2, ξ_2; η_3, ζ_3, ξ_3 sono variabili cogredienti.

Quindi si vede che il rapporto $\dfrac{\Delta(1,2,3)}{\Delta(1,2,4)}$ è un invariante assoluto.

Ora si vede subito che

$$\Delta(1\,2\,3) = \frac{1}{\xi_1\,\xi_2\,\xi_3} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{D(1\,2\,3)}{\xi_1\,\xi_2\,\xi_3};$$

Quindi si trae subito che il prodotto dei due invarianti assoluti

$$\frac{\Delta(1\,2\,3)}{\Delta(1\,2\,4)}, \quad \frac{\Delta(4\,5\,6)}{\Delta(3\,5\,6)},$$

si riduce identicamente a

$$\frac{D(1\,2\,3)\cdot D(4\,5\,6)}{D(1\,2\,4)\cdot D(3\,5\,6)}$$

che sarà, a sua volta, un'invariante assoluto rispetto alle (3); in particolare potrà essere $y_1 = y_6$, $z_1 = z_6$.

Questa è un'estensione della proprietà dell'equazione di Riccati; ci dice che

L'espressione

$$\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_4 & y_5 & y_6 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_3 & y_5 & y_6 \\ z_3 & z_5 & z_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

ove le y, z *sieno coppie e soluzioni delle* (6), *è* ***costante***; ***in particolare*** *può essere* $y_1 = y_6$, $z_1 = z_6$.

Conosciute quindi cinque coppie-soluzioni delle (6), *è* ***determinata***, *senza quadratura, ogni altra soluzione* [1].

Basta infatti risolvere il sistema

$$\frac{D(1\,2\,3)\cdot D(4\,5\,1)}{D(1\,2\,4)\cdot D(3\,5\,1)} = k_1 \quad ; \quad \frac{D(1\,2\,3)\cdot D(4\,6\,1)}{D(1\,2\,4)\cdot D(3\,6\,1)} = k_2$$

per ottenere la soluzione y_1, z_1, se si conoscono le coppie (2), ... (6).

Per verificare direttamente tale proprietà, consideriamo le coppie (1), (2), (3). Sostituiamo nella (6), al posto di y, y_1, z_1, e moltiplichiamo la prima per $(z_2 - z_3)$, la seconda per $(y_1 - y_3)$; permutiamo circolarmente gli indici, e consideriamo l'espressione

$$\{y'_1(z_2 - z_3) - y'_2(z_1 - z_3) + y'_3(z_1 - z_2)\} -$$
$$- \{z'_1(y_2 - y_3) - z'_2(y_1 - y_3) + y'_3(z_1 - z_2)\} = \frac{d}{dx}\cdot D(1\,2\,3).$$

[1] Per $n-1$ variabili, si hanno le equazioni

$$y'_\rho = k_\rho + \Sigma a_{\rho\sigma}\cdot y_\sigma - y_\rho(\Sigma b_\sigma y_\sigma), \qquad (\rho = 1, \dots, n-1)$$

con gli invarianti

$$\frac{D(1\,2\,3 \dots n)\cdot D(n+1 \dots 2n)}{D(1\,2\,3 \dots n+1)\cdot D(n \dots 2n)},$$

ove, al più, $n-2$ n-ple possono coincidere.

La soluzione generale è conosciuta allorchè si conoscono $2n+1$ soluzioni: basta scrivere il sistema di $n-1$ equazioni

$$\frac{C(1\,2 \dots n-1, n)\cdot D(n+1, n+2, 3, \dots 1)}{D(1\,2 \dots n-1, n+1)\cdot D(n, n+2, 3 \dots 1)} = k_1;$$

$$\frac{D(1, 2, n-1, n)\cdot D(n+1, n+3, 3, \dots 1)}{D(1, 2, n-1, n+1)\cdot D(n, n+3, 3, \dots 1)} = k_2, \dots \dots$$

ove la (1) sia incognita, e le (2) ..., (n), $(n+1)$, .. $(2n)$ sono note.

È facile vedere che otterremo, per le (6),

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{D}(1\,2\,3) = a\,\{ y_1(z_1 - z_3) - y_2(z_1 - z_3) + y_3(z_1 - z_2) \} +$$
$$+ b\,\{ - z_1(y_2 - y_3) + z_2(y_1 - y_3) - z_3(y_1 - y_2) \} +$$
$$+ y_1(my_1 + n_{-1})(z_2 - z_3) - y_2(my_2 + nz_2)(z_1 - z_3) +$$
$$+ y_3(my_3 + nz_3)(z_1 - z_2) + z_1(my_1 + nz_1)(y_2 - y_3) + \cdots$$

Ora, è facile vedere che quest' ultima espressione può scriversi anche

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{D}(1\,2\,3) = a\cdot\mathrm{D}(1\,2\,3) + b\,\mathrm{D}(1\,2\,3) + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{vmatrix},$$

ove $\alpha = my + nz$; e se, in quest' ultimo determinante, all' ultima linea sommiamo la prima moltiplicata per m, la seconda moltiplicata per n, otteniamo, all' ultima linea, il fattore $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; e perciò

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{D}(1\,2\,3) = a\,\mathrm{D}(1\,2\,3) + b\,\mathrm{D}(1\,2\,3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\cdot\mathrm{D}(1\,2\,3).$$

Quindi, si ha

$$\frac{d \log \mathrm{D}(1\,2\,3)}{dx} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\,;$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}\left\{ \log\mathrm{D}(1\,2\,3) + \log\mathrm{D}(4\,5\,6) - \log\mathrm{D}(1\,2\,4) - \log(3\,5\,6) \right\} =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) - (\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6) = 0\,.$$

E questa, integrata, ci dà proprio il teorema che avevamo trovato così brevemente [1].

4. Risultati completamente analoghi si possono ottenere per equazioni di tipo più generale. Partendo da un qualunque gruppo di trasformazioni ad n variabili per ν parametri essenziali, e supponendo le variabili ed i parametri funzioni della x, l'integrazione delle trasformazioni del gruppo ci condurrà alla soluzione di equazioni differenziali, facilmente ricavabili dal gruppo stesso.

Se inoltre con ϱ serie di n variabili cogredienti si può formare un invariante assoluto H rispetto alle trasformazioni del gruppo, tale invariante

[1] Se invece di considerare il gruppo lineare fratto, si considera un suo sottogruppo, avente altri invarianti, si hanno equazioni differenziali del tipo scritto, fra i cui coefficienti intercedono relazioni, e fra le cui soluzioni esistono altre relazioni ancora.

ci darà una relazione fra ϱ soluzioni di quelle equazioni, se lo si eguaglia ad una costante.

E perciò, conosciute $\varrho+n-2$ soluzioni, (1) (2) .... $(\varrho+n-2)$, di quelle equazioni, sarà conosciuta, senza quadratura qualsiasi altra, ricavandosi essa dalle relazioni

$$\mathrm{H}\big((1),(2),\dots,(\varrho-1),(\varrho')\big)=k_1\ ,\ \mathrm{H}\big((1),\dots,(\varrho-2),(\varrho),(\varrho'+n)\big)=$$
$$=k_2,\dots,\mathrm{H}\big((1),\dots,(\varrho-2),(\varrho+n-2),(\varrho')\big)=k_n\,,$$

con $k_1, k_2, \dots, k_n$ costanti arbitrarie.

Potrebbe naturalmente essere $n=\infty$, il quale caso comprende l'integrazione di due gruppi funzionali, e la soluzione di integro-differenziali; o $\nu=\infty$, che è il caso della più generale equazione differenziale; o infine $\nu=n=\infty$ che dà luogo alle più generali integro-differenziali.

Matematica. — *Su una classe di congruenze* W *di carattere proiettivo.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. In una mia Memoria [1] io ho dimostrato che, come le forme differenziali di Gauss definiscono, in geometria differenziale, una superficie a meno di movimenti, così in modo analogo si può definire una superficie a meno di collineazioni per mezzo di forme differenziali del primo ordine; le quali anzi si possono scegliere in modi molteplici. Uno dei modi più interessanti è di definire la superficie mediante due forme del *primo* ordine: una di terzo grado (che, uguagliata a zero, dà l'equazione differenziale delle linee, che io chiamo di Darboux-Segre); e l'altra di secondo grado (che, uguagliata a zero, dà l'equazione delle linee di Wilczynski). L'equazione ottenuta, annullando lo hessiano della prima, dà l'equazione delle asintotiche; e, assunte queste come linee coordinate u, v, le due forme si possono [2] scrivere

$$\Sigma_1 = 2\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}du^3+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}dv^3\right]$$
$$\mathrm{W}_1=-\mathrm{P}\,du^2+\mathrm{R}\,du\,dv+\mathrm{Q}\,dv^2,$$

[1] *Invarianti proiettivo-differenziali* ecc. Questa Mem. è in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

[2] Seguo le notazioni delle classiche *Lezioni* di geometria differenziale del prof. L. Bianchi. Con $\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}$ $(i,k,l=1,2)$ indico pertanto i simboli di Christoffel di seconda specie per l'elemento lineare.