ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ci darà una relazione fra ϱ soluzioni di quelle equazioni, se lo si eguaglia ad una costante.

E perciò, conosciute $\varrho + n - 2$ soluzioni, (1) (2) .... $(\varrho + n - 2)$, di quelle equazioni, sarà conosciuta, senza quadratura qualsiasi altra, ricavandosi essa dalle relazioni

$$\mathrm{H}\big((1), (2), \ldots, (\varrho - 1), (\varrho')\big) = k_1 \,, \quad \mathrm{H}\big((1), \ldots, (\varrho - 2), (\varrho), (\varrho' + n)\big) = \\ = k_2, \ldots, \mathrm{H}\big((1), \ldots, (\varrho - 2), (\varrho + n - 2), (\varrho')\big) = k_n \,,$$

con $k_1, k_2, \ldots, k_n$ costanti arbitrarie.

Potrebbe naturalmente essere $n = \infty$, il quale caso comprende l'integrazione di due gruppi funzionali, e la soluzione di integro-differenziali; o $\nu = \infty$, che è il caso della più generale equazione differenziale; o infine $\nu = n = \infty$ che dà luogo alle più generali integro-differenziali.

Matematica. — *Su una classe di congruenze* W *di carattere proiettivo.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. In una mia Memoria [1] io ho dimostrato che, come le forme differenziali di Gauss definiscono, in geometria differenziale, una superficie a meno di movimenti, così in modo analogo si può definire una superficie a meno di collineazioni per mezzo di forme differenziali del primo ordine; le quali anzi si possono scegliere in modi molteplici. Uno dei modi più interessanti è di definire la superficie mediante due forme del *primo* ordine: una di terzo grado (che, uguagliata a zero, dà l'equazione differenziale delle linee, che io chiamo di Darboux-Segre); e l'altra di secondo grado (che, uguagliata a zero, dà l'equazione delle linee di Wilczynski). L'equazione ottenuta, annullando lo hessiano della prima, dà l'equazione delle asintotiche; e, assunte queste come linee coordinate u, v, le due forme si possono [2] scrivere

$$\Sigma_1 = 2 \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} du^3 + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} dv^3 \right]$$

$$\mathrm{W}_1 = - \mathrm{P}\, du^2 + \mathrm{R}\, du\, dv + \mathrm{Q}\, dv^3,$$

[1] *Invarianti proiettivo-differenziali* ecc. Questa Mem. è in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

[2] Seguo le notazioni delle classiche *Lezioni* di geometria differenziale del prof. L. Bianchi. Con $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$ $(i, k, l = 1, 2)$ indico pertanto i simboli di Christoffel di seconda specie per l'elemento lineare.

ove

$$P = \frac{1}{2}\left\{ {11 \atop 1} \right\}'_u - \frac{1}{4}\left\{ {11 \atop 1} \right\}^2 - \frac{1}{2}\left\{ {11 \atop 2} \right\}\left\{ {22 \atop 2} \right\} - \frac{1}{2}\left\{ {11 \atop 2} \right\}'_v +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\log\left\{ {22 \atop 1} \right\}\right)''_{uu} + \frac{1}{4}\left[\left(\log\left\{ {22 \atop 1} \right\}\right)'_u\right]^2$$

$$R = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{\left\{ {22 \atop 1} \right\}} .$$

Q si deduce da P, permutando u con v, l'indice 1 con l'indice 2 (¹).

2. Le superficie, per cui è eccezionale il seguente problema: *Determinare* (a meno di una collineazione) *una superficie di cui sono date le linee di Darboux-Segre e le linee di Wilczynski*, formano una classe notevole di superficie. Si tratta delle superficie per cui $R = 0$; cioè delle *superficie, per cui le linee di Wilczynski costituiscono un sistema coniugato*. Lo studio anzi del problema citato per tali classi di superficie, di cui si sta ora occupando uno studente della Università di Torino, offre molte notevoli particolarità.

3. Queste superficie godono analiticamente della seguente proprietà: se non è $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$, oppure $\left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0$, nel qual caso si tratta di superficie *rigate*, si può, con un cambiamento dei parametri u, v delle assintotiche, supporre che per esse sia $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\}$. Queste superficie, che costituiscono la più semplice generalizzazione delle superficie rigate, dipendono dunque da una funzione $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\}$ arbitraria delle u, v e inoltre dai valori, che ancora si possono scegliere ad arbitrio, di P su una assintotica $v = \text{cost}$, e di Q su una assintotica $u = \text{cost}$.

4. Tali superficie si presentano nel modo più spontaneo nel problema seguente; il quale, oltre al problema citato al n. 2, promette di dare una teoria della trasformazione di tali superficie con congruenze W.

Come sorge spontaneo dalla mia Memoria citata, le linee $\Sigma = 0$ di Darboux-Segre sono, dopo le assintotiche, il più semplice sistema di linee, tracciato su una superficie, che si possa definire in modo puramente proiettivo. Anzi la conoscenza di tali linee determina le assintotiche, la cui equazione è precisamente lo hessiano di Σ_1.

(¹) Come sarà dimostrato altrove, la prima di queste forme ha grande importanza per lo studio di un problema, che è, per il gruppo proiettivo, l'analogo del problema della deformazione di una superficie in una superficie applicabile.

Noi ci chiediamo dunque:

Quando mai la corrispondenza stabilita tra le due falde focali da una congruenza di rette è tale che sulle due falde focali si corrispondano le linee $\Sigma_1 = 0$ *di Darboux-Segre?*

Una tale congruenza è necessariamente W. Come si vedrà, le congruenze, di cui qui ci occupiamo, si possono considerare come una semplice generalizzazione delle congruenze a falde focali rigate, già studiate dai professori Bianchi e Segre. I teoremi che qui dimostreremo sono i seguenti:

1°) *Le falde focali di una di tali congruenze sono superficie su cui le linee di Wilczynski formano un sistema coniugato.*

2°) *Viceversa ogni tale superficie è falda focale di* ∞^3 *congruenze, sulle cui falde si corrispondono le linee di Darboux-Segre.*

Pare dunque non privo di ogni interesse lo studio più profondo del problema, a cui è dedicata la presente Nota.

5. Per dimostrare i teoremi citati, mi varrò dei risultati di una Memoria del prof. Picone [1]. Con $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ indicherò l'elemento lineare dell'immagine sferica della prima falda focale della congruenza; con ψ la funzione caratteristica della deformazione infinitesima individuata dalla congruenza; con ψ_i, ψ_{ik}, ψ_{ikl} indicherò per $i, k, l = 1, 2$ le derivate covarianti di ψ rispetto a tale forma quadratica; con $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ i simboli di Christoffel di tale elemento sferico, che differiscono solo per il segno dai simboli analoghi costruiti per l'elemento lineare della prima falda focale. È ben noto che

$$\psi_{12} + f\psi = 0. \tag{1}$$

D'altra parte [cfr. le (10), (11) del § 3 di (P)] affinchè tali simboli relativi ad una falda siano proporzionali ai simboli omologhi costruiti per l'altra falda; cioè, *affinchè sulle due falde si corrispondano le linee di Darboux-Segre*, deve essere, indicando con λ un fattore di proporzionalità,

$$\psi_{11} + e\,\psi = \frac{\lambda}{H} \left\{ {11 \atop 2} \right\} \tag{2}$$

$$\psi_{22} + g\,\psi = -\frac{\lambda}{M} \left\{ {22 \atop 1} \right\} \tag{3}$$

[1] *Sulle congruenze rettilinee W* (Rendiconti del Circ. matem. di Palermo, 1913, tomo XXXVII). In questa Memoria, fondamentale per la teoria di tali congruenze, l'A., superando gravi difficoltà analitiche, calcola tutti gli elementi di una congruenza W. Indicherò questa Memoria con (P).

dove $H = \sqrt{e}$ sen $(\theta + \omega)$ ed $M = \sqrt{g}$ sen $(\theta - \omega)$; con ω è indicato l'angolo definito dalla $\cos 2\omega = \frac{f}{\sqrt{eg}}$; con θ l'angolo fra 0 e π che un raggio della congruenza fa con una linea di curvatura.

Ora essendo $+1$ la curvatura dell'elemento lineare $edu^2 + 2fdu\,dv + gdv^2$, si ha identicamente [1]

$$(4) \qquad \psi_{121} - \psi_{112} = -f\psi_1 + e\psi_2 \quad ; \quad \psi_{221} - \psi_{212} = f\psi_2 - g\psi_1 .$$

Sostituendo in (4), al posto della ψ_{pqt}, i loro valori

$$\psi_{pqt} = \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial x_t} - \sum_s \left\{ \begin{matrix} p\,t \\ s \end{matrix} \right\} \psi_{sq} - \sum_s \left\{ \begin{matrix} q\,t \\ s \end{matrix} \right\} \psi_{ps} \quad (p, s, q, t = 1, 2),$$

dove al posto di ψ_{pq} si scrive il valore che se ne deduce dalle (1), (2), (3), le (4) diventano le condizioni di integrabilità di (1), (2), (3) considerate come equazioni nella ψ. Ricordando che, per $\lambda = 0$, queste condizioni sono soddisfatte, esse assumono la forma semplice (indicando con $-\frac{1}{\varrho^2}$ la curvatura della prima falda focale)

$$(5) \qquad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}}{H} + \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial v} - \frac{H}{M} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$(6) \qquad \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{M} + \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial u} - \frac{M}{H} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 .$$

Bisogna calcolare la condizione di integrabilità delle (5) e (6) considerate come equazioni in λ. Si trova

$$(7) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}}{\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}} + \Omega = 0 ,$$

dove

$$(8) \qquad \Omega = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{M}{H} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{M}{H} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H}{M} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) .$$

Proveremo tosto che $\Omega = 0$; allora la (7) coincide con l'equazione con cui al n. 2 abbiamo definito le nostre superficie.

[1] Ricci, *Teoria delle superficie*. Padova, ed. Drucker, 1898, pag. 109.

Viceversa, se questa equazione è soddisfatta, le (5) e (6) permettono di determinare λ con una sola quadratura. E le (1), (2), (3) diventano un sistema illimitatamente integrabile.

6. Dimostriamo dunque che $-\Omega = 0$. Adotteremo senz'altro le notazioni di (P), indicando con σ l'angolo dei piani focali, con t la distanza dei fochi, e ponendo

$$\delta = eg - f^2 \quad ; \quad K = \sqrt{e}\cos(\theta + \omega) \quad ; \quad N = \sqrt{g}\cos(\theta - \omega).$$

Per il calcolo di $-\Omega$ è importante ricordare le (II*) e le (9) del § 1 di (P); le quali permettono di calcolare le derivate di $\cot\sigma$, di H, K, M, N. Sarà bene ricordare anche l'identità $\sqrt{\delta} = HN - MK$. Scrivendo $-\Omega$ nella forma

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{H}{M} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{M}{H}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left(\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{H}{M}\right)$$

si trova facilmente, calcolando l'espressione tra [. . .], che

$$-\Omega = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log(\varrho\sqrt{\delta}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{H}{M}\frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial v} - \frac{\sqrt{\delta}}{M}\left(\cot\sigma + \frac{\varrho}{t}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left(\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{H}{M}\right).$$

Applicando di nuovo le citate equazioni di (P), si trova infine che $-\Omega$ è uguale a

$$\frac{H}{M}\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\log(\varrho\sqrt{\delta})}{\partial u} + \frac{\partial^2\log\sqrt{\varrho}}{\partial v^2} - \frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial v}\,\frac{\partial\log(\varrho\sqrt{\delta})}{\partial v}\right]$$

$$-\frac{N}{M}\sqrt{\delta} + \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log(\varrho\sqrt{\delta}) - \frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial u}\,\frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial v}\right].$$

Scrivendo le (4) del § 3 di (P), scrivendo cioè le equazioni che dicono essere uguale a $+1$ la curvatura di $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$, si trova che $-\Omega$ (moltiplicato per il fattore $M \neq 0$) si riduce a

$$gH - N\sqrt{\delta} - Mf =$$

$$= g\sqrt{e}\,[\operatorname{sen}(\theta + \omega) - \cos(\theta - \omega)\operatorname{sen} 2\omega - \operatorname{sen}(\theta - \omega)\cos 2\omega]$$

che è identicamente nulla [perchè $\theta + \omega = (\theta - \omega) + 2\omega$], come volevasi dimostrare.