ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

ed essendo $\sigma - \beta$ ed ε arbitrarî, avremo

$$\limsup_{\omega=\infty} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t)\, G(\beta + it - s_0)\, dt - f(s_0) \right| = 0\,,$$

cioè

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t)\, G(\beta + it - s_0)\, dt = f(s_0)\,,$$

restando così dimostrata la (6).

Dal teorema dimostrato, supponendo $\lambda_n = n$, può dedursi il teorema del prof. Pincherle.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un suolo elastico nel caso dell'eredità lineare, per date tensioni superficiali.* Nota di R. Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota recente [1] ho determinato la deformazione del suolo elastico, quando in superficie sieno dati gli spostamenti. Risolverò ora il problema nel caso che in superficie sieno date le pressioni.

La relativa risoluzione è da me accennata in questa breve Nota, limitandomi a trovare la dilatazione cubica, e mostrando in seguito il metodo per ottenere gli spostamenti, senza arrivare alle formole finali.

In sostanza farò vedere come il metodo si riduca all'ordinario quando vengano sostituite alle due costanti d'isotropia del mezzo, le due operazioni funzionali che entrano nella teoria elastica ereditaria.

1. Nella teoria ereditaria del Volterra entrano le due operazioni funzionali

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 f(t) = K f(t) + \int_0^t \psi(t\,,\tau)\, f(\tau)\, d\tau\,, \\ A_2 f(t) = (L + 2K)\, f(t) + \int_0^t [\varphi(t\,,\tau) + 2\psi(t\,,\tau)]\, f(\tau)\, d\tau\,. \end{cases}$$

Indicherò con $A_1^{-1} f$ l'operazione inversa della $A_1 f$: si ottiene risolvendo una equazione di Volterra di seconda specie. Parimenti, essendo $Af\,, Bf$ due operazioni del tipo anzidetto, sasà ABf l'operazione ottenuta eseguendo, sulla $f(t)$, prima l'equazione B, e, sul risultato ottenuto, l'operazione A.

Ciò posto siano $u\,, v\,, w$ le componenti dello spostamento di un punto d'un corpo elastico, θ la dilatazione cubica in quel punto.

[1] *Sulla deformazione di un suolo elastico* ecc. Rendiconti Lincei, 6 giugno 1915.

Le equazioni dell'equilibrio elastico con eredità sono [1] (nell'assenza di forze di massa)

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad , \quad \Delta^2 v = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad , \quad \Delta^2 w = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \,, \tag{2}$$

essendosi posto

$$\vartheta = (1 - \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_2)\,\theta \,. \tag{3}$$

Si deduce facilmente. da queste,

$$\Delta^2 \vartheta = \Delta^2 \theta = 0 \,. \tag{4}$$

Siano inoltre t_{rs} le componenti principali di pressione, in ogni punto del corpo: valgono allora le formole

$$\Delta^2 t_{11} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \ldots \qquad \Delta^2 t_{12} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \, \partial y} \,, \tag{5}$$

dove

$$\Theta = 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\,\theta \,; \tag{6}$$

e sarà, per la seconda delle (4),

$$\Delta^2 \Theta = 0 \,. \tag{7}$$

2. Sia ora un solido elastico indefinito limitato da un piano che prenderemo come piano xy: l'asse delle z (normale al piano limite) sia interno al corpo. Sono date per ipotesi le componenti $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{Y}_\sigma, \mathrm{Z}_\sigma$ della pressione che si esercita in superficie: si vuole determinare la deformazione del corpo, le forze di massa essendo nulle.

Consideriamo le tre componenti principali di pressione t_{13}, t_{23}, t_{33}: esse prendono valori noti in superficie riducendovisi alle $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{Y}_\sigma, \mathrm{Z}_\sigma$; di più, soddisfano alle equazioni [vedi (5)]

$$\Delta^2 t_{13} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \, \partial z} \quad , \quad \Delta^2 t_{23} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \, \partial z} \quad , \quad \Delta^2 t_{33} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \,. \tag{5'}$$

Se consideriamo le tre funzioni

$$\mathrm{X}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\mathrm{X}_\sigma}{r}\, d\sigma \quad , \quad \mathrm{Y}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\mathrm{Y}_\sigma}{r}\, d\sigma \quad , \quad \mathrm{Z}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\mathrm{Z}_\sigma}{r}\, d\sigma \,,$$

dove le integrazioni sono estese al piano xy ed r rappresenta la distanza del generico punto x, y, z dal punto d'integrazione del piano xy, esse, come è noto, sono armoniche e soddisfano alle condizioni

$$\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \mathrm{X}_\sigma \ldots$$

[1] Vedi Volterra, *Fonctions des lignes*, cap. VIII e IX; oppure Acta mathematica, vol. 35°. cap. II.

È facile allora verificare [servendoci d'un noto teorema di univocità dell'Almansi ([1])] che

$$(8)\qquad \begin{cases} t_{13} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z}, \quad t_{23} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial Y_1}{\partial z}, \\ t_{33} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial Z_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Abbiamo così le t_{13}, t_{23}, t_{33} espresse mediante Θ: ne ricaveremo la Θ. Una delle condizioni di equilibrio (essendo nulle le facce di massa) è

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial x} + \frac{\partial t_{23}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} = 0.$$

Servendoci delle (8) e ricordando la (7), deduciamo

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z}\right).$$

Le due funzioni Θ ed $F = -2\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)$ entrambe armoniche, e con derivate rispetto a z, eguali, non possono differire che per una funzione $\varphi(x, y)$ armonica in tutto il piano xy (z qualunque) e, perciò, costante. Ma F si annulla all'infinito; lo stesso può evidentemente ([2]) dirsi della θ e, quindi, di Θ: dovrà la costante, in conseguenza, essere eguale a zero, e si avrà

$$\Theta = -2\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z}\right);$$

e dalla (6), che definisce Θ mediante la dilatazione cubica θ, si ottiene

$$(9)\qquad \theta = (A_2 - A_1)^{-1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z}\right).$$

Nota la dilatazione cubica θ dico essere nota la $\frac{dw}{dn}$, essendo n la normale al contorno: infatti, dette ω_1, ω_2 le doppie componenti della rotazione di ogni particella, sappiamo che, in generale ([3]),

$$\frac{dw}{dn} = \frac{1}{2}\left[A_1^{-1} Z_\sigma + \omega_1 \cos \widehat{ny} - \omega_2 \cos \widehat{nz} + (2 - A_1^{-1} A_2) \,.\, \theta \,.\, \cos \widehat{nz}\right];$$

([1]) Vedi Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^{2n} = 0$. Annali di matematica, ser. 3ª, tomo II.

([2]) L'annullarsi della θ all'infinito è evidente per le condizioni sottintese all'infinito per le funzioni $X_\sigma Y_\sigma Z_\sigma$, date nel piano xy.

([3]) Vedi Volterra, Acta mathematica, cap. II, art. 9°.

e questa relazione, essendo nel nostro caso $\cos \widehat{nx} = \cos \widehat{ny} = 0$, $\cos \widehat{nz} = 1$, diventa

$$\frac{dw}{dn} = \frac{1}{2} [A_1^{-1} Z_\sigma + (2 - A_1^{-1} A_2)\, \theta] . \tag{10}$$

Ora, essendo note $\Delta^2 w$ per le (2), e $\frac{dw}{dn}$ per la (10), la w è determinata, e si sa costruire.

Ricordo inoltre che [1]

$$t_{13} = K\gamma_{13} + \int_0^t \psi(t, \tau)\, \gamma_{13}\, d\tau = A_1 \gamma_{13} ,$$

$$t_{23} = K\gamma_{23} + \int_0^t \psi(t, \tau)\, \gamma_{23}\, d\tau = A_1 \gamma_{23} .$$

Ma, da quanto precede, t_{13}, t_{23}, sono note; e otterremo, invertendo,

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = A_1^{-1} t_{13} ,$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = A_1^{-1} t_{23} .$$

Saranno perciò note $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, che per $z = 0$ si riducono alle derivate normali. Ora, per le (2), conosciamo $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, essendo ϑ nota; e inoltre, per le precedenti considerazioni, le derivate normali di u e v. Quindi queste sono determinate e si sanno costruire, e il problema è risolto.

Matematica. — *Sulle varietà trasversali delle rigate algebriche di uno spazio pari.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE.

1. Quando si abbia una rigata immersa in uno spazio di dimensione pari S_{2r}, tale che r sue generatrici consecutive siano in generale linearmente indipendenti, presenta un certo interesse la considerazione della ∞^1 degli S_{r-1} appoggiati a $r+1$ generatrici consecutive (*varietà trasversale*), e della *curva trasversale*, luogo dei punti di contatto $(r+1$ — punto) di quegli S_{r-1} colla rigata [2]. Vogliamo anzitutto determinare l'ordine di questa curva e

(1) Vedi Volterra, Acta mathematica, art. 6° (9 *a*).

(2) Cfr. M. Morale, *La rigata razionale d'ordine n dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale, con particolare considerazione al caso di* $n = 5$ (Palermo, Tipografia matematica, 1899); H. Mohrmann, *Ueber die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen und ihre Haupttangentenflächen als reziprocke*