ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

e questa relazione, essendo nel nostro caso $\cos \widehat{nx} = \cos \widehat{ny} = 0$, $\cos \widehat{nz} = 1$, diventa

$$\frac{dw}{dn} = \frac{1}{2}\left[A_1^{-1} Z_\sigma + (2 - A_1^{-1} A_2)\,\theta\right]. \tag{10}$$

Ora, essendo note $\Delta^2 w$ per le (2), e $\frac{dw}{dn}$ per la (10), la w è determinata, e si sa costruire.

Ricordo inoltre che [1]

$$t_{13} = K\gamma_{13} + \int_0^t \psi(t, \tau)\, \gamma_{13}\, d\tau = A_1 \gamma_{13},$$

$$t_{23} = K\gamma_{23} + \int_0^t \psi(t, \tau)\, \gamma_{23}\, d\tau = A_1 \gamma_{23}.$$

Ma, da quanto precede, t_{13}, t_{23}, sono note; e otterremo, invertendo,

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = A_1^{-1} t_{13},$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = A_1^{-1} t_{23}.$$

Saranno perciò note $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, che per $z = 0$ si riducono alle derivate normali. Ora, per le (2), conosciamo $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, essendo ϑ nota; e inoltre, per le precedenti considerazioni, le derivate normali di u e v. Quindi queste sono determinate e si sanno costruire, e il problema è risolto.

Matematica. — *Sulle varietà trasversali delle rigate algebriche di uno spazio pari.* Nota di Alessandro Terracini, presentata dal Socio C. Segre.

1. Quando si abbia una rigata immersa in uno spazio di dimensione pari S_{2r}, tale che r sue generatrici consecutive siano in generale linearmente indipendenti, presenta un certo interesse la considerazione della ∞^1 degli S_{r-1} appoggiati a $r+1$ generatrici consecutive (*varietà trasversale*), e della *curva trasversale*, luogo dei punti di contatto ($r+1$ — punto) di quegli S_{r-1} colla rigata [2]. Vogliamo anzitutto determinare l'ordine di questa curva e

(1) Vedi Volterra, Acta mathematica, art. 6° (9 *a*).

(2) Cfr. M. Morale, *La rigata razionale d'ordine n dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale, con particolare considerazione al caso di* $n = 5$ (Palermo, Tipografia matematica, 1899); H. Mohrmann, *Ueber die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen und ihre Haupttangentenflächen als reziprocke*

di quella varietà, per una rigata Φ generica tra quelle di ordine n e di genere p [1].

Sia C^n la sezione della Φ con uno S_{2r-1} generico: e consideriamo la corrispondenza (α, β) che nasce sulla C^n, chiamando omologhi due suoi punti A e B tali che lo S_{2r-1}, determinato dalla generatrice b della Φ passante per B e da altre $r-1$ ad essa consecutive [S_{2r-1} $(r-1)$-tangente lungo la b], contenga ulteriormente A. La corrispondenza è a valenza r, ed è $\alpha = n - r$. Per quello che riguarda β, osserviamo che, proiettando la Φ da A sopra uno S_{2r-1}, si ottiene una Φ' d'ordine $n-1$ (e genere p) che sarà dotata precisamente di β sistemi di r generatrici consecutive situate in un iperpiano, o, come possiamo dire più brevemente, di $\beta = \beta\ (n-1, p, 2r-1)$ *generatrici singolari*. Sarà, chiamando $\gamma = \gamma(n, p, 2r)$ l'ordine della curva trasversale,

$$\gamma(n, p, 2r) = n - r + \beta(n-1, p, 2r-1) + 2rp. \tag{1}$$

Ora, per determinare il numero β delle generatrici singolari di una rigata generica F^n di S_{2r-1}, di genere p, ricordiamo anzitutto che gli S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti nei punti di una generatrice generica formano generalmente un fascio, intorno allo S_{2r-3}, determinato da quella generatrice e da $r-2$ ad essa infinitamente vicine, fascio che risulta riferito proiettivamente alla punteggiata dei punti di contatto (estensione immediata del classico teorema di Chasles); a questo si ha eccezione (cioè la detta proiettività degenera) quando quella generatrice è singolare (nel senso sopra detto). Ora, poichè gli S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti alla F^n costituiscono un sistema ∞^2, formato dagli ∞^1 fasci di S_{2r-2} aventi per base gli ∞^1 S_{2r-3} $(r-2)$-tangenti alla F lungo le sue generatrici, se consideriamo i due sistemi ∞^1 di S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti alla F nei punti di due sue sezioni iperpiane, a^n e b^n, possiamo trovare il numero ϱ degli S_{2r-2} che sono $(r-1)$-tangenti in punti delle due curve, mediante la formula duale di quella ben nota che assegna il numero dei punti di intersezione di due curve tracciate su una rigata algebrica: precisamente, se a una retta generica dello S_{2r-1} si appoggiano l S_{2r-3} $(r-2)$-tangenti alla F lungo altrettante generatrici, e se il sistema costituito dagli S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti in punti di una sezione iperpiana

Linienflächen (Archiv der Mathematik und Physik, Dritte Reihe, Band XVIII, 1911, pp. 66-68); E. Bompiani, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* (Rendic. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVII, 1914, pp. 305-331); A. Terracini, *Su alcune superficie rigate razionali* (Rendic. del Reale Istituto lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVIII, pp. 62-76; ved. il n. 4).

[1] Per $r=2$, $p=0$, cfr. Morale, loc. cit. [1]; per $r=2$ e p qualunque, il risultato è enunciato dal prof. Segre nel suo articolo, in corso di stampa, *Mehrdimensionale Räume*, della *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*.

della F è di classe m, sarà $\varrho = 2m - l$. E poichè, per quanto è detto sopra, i ϱ S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti in punti di a^n e di b^n sono dati dagli S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti negli n punti comuni ad a^n e a b^n, e dai β S_{2r-2} $(r-1)$-tangenti singolari, mentre l esprime il numero delle generatrici singolari per una superficie di ordine n e di genere p dello S_{2r-3} (proiezione della F^n da una retta generica dello S_{2r-1}) cioè $l = \beta\,(n\,, p\,, 2r-3)$, e m non è che l'ordine della curva trasversale di una superficie dello S_{2r-2}, pure d'ordine n e genere p (proiezione della F^n data nello S_{2r-1}, fatta da un punto generico), ossia $m = \gamma(n\,, p\,, 2r-2)$, si conclude:

$$\beta(n\,, p\,, 2r-1) = 2\gamma(n\,, p\,, 2r-2) - \beta(n\,, p\,, 2r-3) - n. \tag{2}$$

Questa formola, insieme con la (1), ci permette di ricavare

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma(n\,, p\,, 2r) = (r+1)\,n + 2r^2(p-1) \\ &\beta(n\,, p\,, 2r-1) = rn + 2r(r-1)\,(p-1)\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Infatti, per $r = 2$, la seconda delle (3) è notoriamente valida, ed è quindi, come mostra la (1), valida anche la prima; e dalle (1) e (2) segue poi subito che, se le (3) sussistono fino a un certo valore di r, sussistono anche pel valore successivo. Così concludiamo:

In generale una superficie rigata di S_{2r}, *di ordine* n *e genere* p, *ha una curva trasversale d'ordine*

$$(r+1)\,n + 2r^2\,(p-1)\,.$$

E anche:

In generale, una superficie rigata di S_{2r-1}, *d'ordine* n *e di genere* p, *ha* $rn + 2r(r-1)\,(p-1)$ *generatrici singolari (cioè situate in un iperpiano con le* $r-1$ *consecutive).*

Per calcolare l'ordine $\omega(n\,, p\,, 2r)$ della ∞^1 di S_{r-1} trasversale della Φ, possiamo ancora applicare un procedimento ricorrente, non dissimile, in sostanza, da quello adoperato dal Morale nel caso particolare da lui considerato. Se Φ' è la proiezione generica della Φ sopra uno S_{2r-1}, e se Γ' è la proiezione della curva trasversale, gli S_{r-1}, appoggiati a $r+1$ generatrici consecutive della Φ, si proiettano negli S_{r-1} passanti pei singoli punti di Γ' e appoggiati a r generatrici consecutive a quelle cui appartengono quei punti. Determiniamo anzitutto l'ordine della varietà di questi ∞^1 S_{r-1}, ossia il numero di quelli tra essi che si appoggiano a uno S_{r-1} generico, π_{r-1}. A tal uopo consideriamo, sopra Γ', la corrispondenza in cui sono omologhi due punti $A_1\,, A_2$, tali che A_2 sia ulteriore intersezione della Γ' con uno S_{r-1} appoggiato a π_{r-1}, alla generatrice per A_1 e ad altre $r-1$ ad essa consecutive. Queste r generatrici, quando sia fissato A_1, determinano con π_{r-1}, quale varietà degli S_{r-1} appoggiati ad esse e a π_{r-1}, una V^r_{2r-2}, per cui ciascuna delle r generatrici ha molteplicità $r-1$; cosicchè la corrispondenza è a valenza $r(r-1)$, e ad A_1 corrispondono $r[(r+1)n+ 2r^2(p-1)]-r(r-1)$ punti A_2: il numero dei punti A_1 corrispondenti ad A_2 è poi dato dal numero degli S_{r-2} trasversali della rigata d'ordine $n-1$ e genere p di uno S_{2r-2} (in cui la Φ' si proietti dal punto A_2) che si appoggiano ad uno S_{r-2} generico; ossia ad A_2 corrispondono $\omega(n-1, p, 2r-2)$ punti A_1. I punti uniti della corrispondenza sono pertanto

$$r[(r+1)n+2r^2(p-1)]-r(r-1)+\omega(n-1,p,2r-2)+2r(r-1)p.$$

Tra essi sono da contarsi, ciascuno $r-1$ volte, i punti di intersezione della Γ' colle generatrici singolari della Φ', per ciascuno dei quali passano $r-1$ S_{r-1} appoggiati a π_{r-1} e a $r+1$ generatrici consecutive della Φ', S_{r-1} che tuttavia non sono, in generale, proiezioni di S_{r-1} appoggiati a $r+1$ generatrici consecutive della Φ. Ricordando che quelle generatrici singolari sono $rn+2r(r-1)(p-1)$, resta dunque

$$(4) \qquad \omega(n, p, 2r) = \omega(n-1, p, 2r-2) + \\ + 2rn + (5r^2-3r)(p-1) + r(r-1)p,$$

da cui segue

$$(5) \qquad \omega(n, p, 2r) = r(r+1)n + r(r+1)(2r-1)(p-1),$$

poichè tal formola, valida per $r=1$ [allora essa porge $\omega = 2\,(n+p-1)$ e coincide con quella che assegna l'ordine di una curva piana di classe n e genere p], si dimostra per induzione ricorrendo alla (4).

In generale, una superficie rigata di S_{2r}, *di ordine* n *e genere* p, *ha una* ∞^1 *di* S_{r-1} *trasversale d'ordine*

$$r(r+1)n + r(r+1)(2r-1)(p-1).$$

2. Si scorge facilmente, ed è noto ([3]), che in generale lo S_{2r-1} $(r-1)$-tangente a una rigata di S_{2r} lungo la sua generatrice generica a, contiene lo spazio r-tangente alla curva trasversale Γ nel punto A situato su quella generatrice, mentre questo spazio non sta, generalmente, con lo S_{2r-3} $(r-2)$-tangente lungo a in uno spazio di dimensione $< 2r-1$. Supposto ora $r > 1$, in quanti punti della curva trasversale si presenta la particolarità che lo spazio r-tangente e lo S_{2r-3} considerati stiano in uno S_{2r-2} (particolarità che può eventualmente essere dovuta all'altra, che lo spazio r-tangente alla Γ in A abbia dimensione $< r$)? Allora, e solo allora, si presenta anche l'altra circostanza che non solo lo spazio r-tangente, ma anche lo S_{r+1} $(r+1)$-tangente a Γ in A è contenuto nello S_{2r-1} $(r-1)$-tangente lungo a, oppure è sostituito da uno spazio $(r+1)$-tangente di minor dimensione, almeno quando si supponga che mai r generatrici consecutive siano

linearmente dipendenti, e che mai $r+1$ generatrici consecutive stiano in un iperpiano. Se infatti $A(t)$ è il punto che descrive la curva trasversale, mentre $B(t)$ è un punto che descrive una curva direttrice generica, t essendo un parametro che, variando in un certo intervallo, individua le generatrici di un pezzo della rigata, si ha identicamente

$$|A, A', A'', \ldots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B', B'', \ldots, B^{(r-1)}| = 0,$$

dove $A' = \dfrac{dA(t)}{dt}$, ecc., e dove nelle varie linee del determinante si sostituiscano successivamente le coordinate proiettive omogenee dei punti considerati. Derivando rispetto a t, si ha ancora identicamente

$$|A, A', A'', \ldots, A^{(r-1)}, A^{(r+1)}, B, B', B'', \ldots, B^{(r-1)}| +$$
$$+ |A, A', A'', \ldots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B', B'', \ldots, B^{(r-2)}, B^{(r)}| = 0.$$

Quando si presenta la prima delle due particolarità indicate, il secondo di questi determinanti è nullo, e tale è pertanto anche il primo. Dal che segue, nelle ipotesi fatte, che $A^{(r)}$ e $A^{(r+1)}$ stanno nello S_{2r-1} $(r-1)$-tangente lungo a; e viceversa, se ciò avviene, segue, ancora in virtù della identità scritta, che fra i determinanti estratti dalla matrice

$$\| A, A', A'', \ldots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B' B'', \ldots, B^{(r-1)}, B^{(r)} \|,$$

sono nulli quelli ottenuti sopprimendo ciascuna delle due ultime colonne; cosicchè, non potendo annullarsi, nelle ipotesi fatte, la matrice, dovrà essere

$$\| A, A', A'', \ldots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B', \ldots, B^{(r-2)} \| = 0.$$

Per una rigata generica d'ordine n e genere p dello S_{2r}, i punti della curva trasversale, dove si presentano le due particolarità accennate, sono $(2r+1)n + 2(2r^2+1)(p-1)$, come risulta considerando sulla curva trasversale la corrispondenza che nel n. 1 avevamo istituito sopra una sezione iperpiana della Φ, per dedurne l'ordine di Γ, corrispondenza che attualmente ha indici $(r+1)n + 2r^2(p-1) - (r+1)$, e $rn + 2r(r-1)(p-1) - (r+1)$, e valenza $r+1$.

In particolare, limitandoci a considerare una rigata generica Φ di S_4, osserviamo che, in corrispondenza di ciascuno dei $5n + 18(p-1)$ punti della curva trasversale Γ sopra considerati, si hanno altrettante generatrici della rigata trasversale Φ_1 che soddisfanno a particolari condizioni di incidenza colle generatrici infinitamente vicine; la presenza di ciascuna di queste singolarità abbassa l'ordine della curva e della rigata trasversale della Φ_1, che coincidono rispettivamente con Γ e Φ, di *tre* e di *sette* unità.

Osserviamo infine che, se si considera una generica Φ^4 rigata razionale di S_4, la sua curva trasversale è, come ho rilevato in altra occasione [loc. cit. (1)], una Γ^4 razionale sezione spaziale della superficie; per quanto precede, giacchè è assurda l'ipotesi che il piano osculatore alla Γ^4 in un suo punto (e quindi anche lo S_3 della Γ^4) contenga la generatrice passante per A, possiamo aggiungere che *la* Γ^4 *di* S_3, *curva trasversale di una generica superficie rigata razionale* Φ^4 *della* S_4, *è dotata di due tangenti di flesso.*

Questo risultato si può confermare direttamente, considerando la Φ^4 come proiezione di una rigata razionale normale F^4 di uno S_5. Se questa è rappresentata parametricamente ponendo le coordinate proiettive omogenee di un suo punto proporzionali a $1, \lambda, \lambda^2, \mu, \mu\lambda, \mu\lambda^2$, e se il centro di proiezione è un punto generico $O\,(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, la curva trasversale della Φ^4 è (cfr. la mia Nota citata) la proiezione della C^4 sezione della F^4 mediante l'iperpiano (passante per O) di coordinate $x_5, -2x_4, x_3, -x_2, 2x_1, -x_0$: i punti di questa curva si ottengono dunque assumendo $\mu = \dfrac{x_3\lambda^2 - 2x_4\lambda + x_5}{x_0\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_2}$. E allora si verifica che i piani osculatori alla C^4, nei punti corrispondenti ai due valori di λ che son radici della

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 - x_2 & \lambda x_4 - x_5 \\ \lambda x_0 - x_1 & \lambda x_3 - x_4 \end{vmatrix} = 0$$

passano per O; le traccie di questi piani sullo S_4 della Φ^4 sono dunque tangenti di flesso per Γ^4.

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

I metodi fino ad ora proposti per dimostrare che una funzione assolutamente continua può ottenersi integrando la sua derivata — considerata là dove esiste — sono tre. Il primo, in ordine di tempo, è del Lebesgue, ed è fondato sulla considerazione delle *catene d'intervalli* (2), che potrebbero anche dirsi *successioni transfinite d'intervalli contigui*, e, secondo alcuni, presenta l'inconveniente di ricorrere al *transfinito*. Il secondo, dovuto

(1) Cfr. Bompiani, loc. cit. pag. 159 in nota.

(2) Una *catena d'intervalli* (ved. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc., p. 63) è un aggregato ordinato d'intervalli non sovrapponentisi di una retta (e quindi necessariamente numerabile), nel quale l'ordine è quello stesso con cui gli intervalli sono disposti sulla retta. In esso, inoltre, ogni intervallo è contiguo all'immediatamente precedente, se questo immediatamente precedente esiste; e, nel caso contrario, ha come primo estremo il limite superiore dei secondi estremi degli intervalli che lo precedono.