ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Osserviamo infine che, se si considera una generica Φ^4 rigata razionale di S_4, la sua curva trasversale è, come ho rilevato in altra occasione [loc. cit. (¹)], una Γ^4 razionale sezione spaziale della superficie; per quanto precede, giacchè è assurda l'ipotesi che il piano osculatore alla Γ^4 in un suo punto (e quindi anche lo S_3 della Γ^4) contenga la generatrice passante per A, possiamo aggiungere che *la* Γ^4 *di* S_3, *curva trasversale di una generica superficie rigata razionale* Φ^4 *della* S_4, *è dotata di due tangenti di flesso.*

Questo risultato si può confermare direttamente, considerando la Φ^4 come proiezione di una rigata razionale normale F^4 di uno S_5. Se questa è rappresentata parametricamente ponendo le coordinate proiettive omogenee di un suo punto proporzionali a $1, \lambda, \lambda^2, \mu, \mu\lambda, \mu\lambda^2$, e se il centro di proiezione è un punto generico O $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, la curva trasversale della Φ^4 è (cfr. la mia Nota citata) la proiezione della C^4 sezione della F^4 mediante l'iperpiano (passante per O) di coordinate $x_5, -2x_4, x_3, -x_2, 2x_1, -x_0$: i punti di questa curva si ottengono dunque assumendo $\mu = \dfrac{x_3\lambda^2 - 2x_4\lambda + x_5}{x_0\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_2}$. E allora si verifica che i piani osculatori alla C^4, nei punti corrispondenti ai due valori di λ che son radici della

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 - x_2 & \lambda x_4 - x_5 \\ \lambda x_0 - x_1 & \lambda x_3 - x_4 \end{vmatrix} = 0$$

passano per O; le traccie di questi piani sullo S_4 della Φ^4 sono dunque tangenti di flesso per Γ^4.

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

I metodi fino ad ora proposti per dimostrare che una funzione assolutamente continua può ottenersi integrando la sua derivata — considerata là dove esiste — sono tre. Il primo, in ordine di tempo, è del Lebesgue, ed è fondato sulla considerazione delle *catene d'intervalli* (²), che potrebbero anche dirsi *successioni transfinite d'intervalli contigui*, e, secondo alcuni, presenta l'inconveniente di ricorrere al *transfinito*. Il secondo, dovuto

(¹) Cfr. Bompiani, loc. cit. pag. 159 in nota.

(²) Una *catena d'intervalli* (ved. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc., p. 63) è un aggregato ordinato d'intervalli non sovrapponentisi di una retta (e quindi necessariamente numerabile), nel quale l'ordine è quello stesso con cui gli intervalli sono disposti sulla retta. In esso, inoltre, ogni intervallo è contiguo all'immediatamente precedente, se questo immediatamente precedente esiste; e, nel caso contrario, ha come primo estremo il limite superiore dei secondi estremi degli intervalli che lo precedono.

al Vitali, si basa sul concetto di *nucleo* di un insieme d'intervalli [1], e su un teorema geometrico ad esso relativo, per il quale, se m è la misura del nucleo, si può, dall'insieme considerato, estrarre un numero finito o una infinità numerabile di intervalli, due a due distinti, di lunghezza complessiva non minore di m. Il terzo, infine, quello del De la Vallée Poussin [2], deriva dalla considerazione delle *funzioni maggiorante e minorante*, relative ad una funzione $f(x)$ integrabile, le quali rappresentano, in tutto l'intervallo dato (a, b), l'integrale $\int_a^x f(x)\,dx$ con una approssimazione prefissata ad arbitrio, la prima per eccesso, la seconda per difetto, ed hanno i loro numeri derivati tutti superiori, la prima, tutti inferiori, la seconda, a $f(x)$. I due ultimi metodi non si servono per nulla del transfinito, ma risultano, a confronto col primo, assai più laboriosi.

In ciò che segue mi propongo di esporre un nuovo metodo, che mi sembra più elementare ed anche più intuitivo di quelli sopra menzionati. Io prendo le mosse dalla seguente osservazione: È noto che una funzione continua $f(x)$, data in un intervallo (a, b), può rappresentarsi con quella approssimazione che si vuole, mediante l'ordinata $\varphi(x)$ di una poligonale inscritta nella curva rappresentatrice della funzione medesima. Orbene, se la funzione considerata è anche a variazione limitata, la $\varphi(x)$ non solo rappresenta, come abbiamo detto, la $f(x)$, ma serve pure a darci, con la sua derivata, una rappresentazione *quasi completa* della derivata $f'(x)$. Con maggior precisione possiamo dire che, *preso arbitrariamente un ε positivo, è possibile di determinare un $\delta > 0$ tale che, se le ascisse dei vertici consecutivi della poligonale $y = \varphi(x)$, inscritta in $y = f(x)$, differiscono fra loro per meno di δ, è $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ in tutto (a, b), e $|f'(x) - \varphi'(x)| < \varepsilon$ in tutto (a, b), fatta eccezione, al più, per i punti di una successione d'intervalli, non sovrapponentisi, di lunghezza complessiva minore di ε.* [Se togliamo la condizione della continuità della $f(x)$, vale a dire, se tale funzione è solo a variazione limitata, la $\varphi(x)$ dà, di essa, non più una rappresentazione completa, ma quasi completa, e resta poi ancora quasi completa la rappresentazione che della $f'(x)$ dà la $\varphi'(x)$]. Sfruttando l'osservazione ora fatta, si può confrontare facilmente l'integrale della $f'(x)$ con quello della $\varphi'(x)$. Da questo confronto scende senz'altro la proposizione voluta.

[1] Secondo il Vitali (*Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, in Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1907-1908), un punto P fa parte del nucleo di un sistema d'intervalli se, comunque si scelga un $\varepsilon > 0$, esiste sempre qualche intervallo del sistema, di lunghezza $< \varepsilon$, al quale appartenga P.

[2] *Cours d'Analyse infinitésimale*, tome I (3ᵉ édit., pag. 269).

1. — Derivabilità, quasi dappertutto, di una funzione a variazione limitata.

Sia $f(x)$ una funzione a variazione limitata, data nell'intervallo (a, b). Supporremo senz'altro, nei ragionamenti che seguono, che la $f(x)$ sia anche continua (ipotesi necessaria per il teorema del n. 4, al quale vogliamo arrivare), lasciando al lettore di fare le poche e lievi modificazioni indispensabili nel caso della discontinuità.

Per essere la $f(x)$ a variazione limitata, la curva $y = f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ ha una lunghezza finita, che indicheremo con L. Dividiamo l'intervallo (a, b) in parti, in modo arbitrario, mediante i punti $a = x^{(0)} < x^{(1)} < \cdots < x_m = b$, e indichiamo con $P^{(0)}, P^{(1)}, \ldots, P^{(m)}$ i punti corrispondenti della curva $y = f(x)$. La poligonale π, avente questi punti come vertici successivi [poligonale inscritta in $y = f(x)$], ha una lunghezza non superiore a L, che indicheremo con la stessa lettera π. Consideriamo una qualunque delle parti in cui (a, b) è stato diviso, la $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, e in essa due punti x e x', ai quali corrisponderanno sulla nostra curva i punti P e P'. Indichiamo con $\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'})$ l'angolo, compreso fra 0 e π, che il segmento orientato $\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}$ fa col segmento orientato $\overline{PP'}$ o con $\overline{P'P}$, a seconda che è $x < x'$ oppure $x > x'$. Se allora $\delta \equiv (x, x')$ è un qualsiasi intervallo *non nullo* appartenente a $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, ed ε è un arbitrario numero positivo < 1, si possono costruire, per la funzione $F(\delta) = \alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'}) - \varepsilon$ e relativamente all'intervallo $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, i due sistemi d'intervalli Δ e $\overline{\Delta}$, definiti nel n. 1 della mia Nota *Successioni di curve e derivazione per serie* (¹), e che contrassegneremo con l'indice r, scrivendo $\Delta^{(r)}$ e $\overline{\Delta}^{(r)}$. Dal modo di costruzione di questi intervalli risulta: 1°) $\sum\limits_n \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq 3 \sum\limits_n \Delta_n^{(r)}$; 2°) se P e P' corrispondono agli estremi di uno stesso $\Delta_n^{(r)}$, è

$$\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'}) \geq \varepsilon ;$$

3°) se (x, x') è un intervallo di $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$ avente un estremo esterno a tutti gli intervalli $\overline{\Delta}_n^{(r)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, è

$$\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'}) < \varepsilon .$$

Consideriamo ora i sistemi $\Delta^{(r)}$ e $\overline{\Delta}^{(r)}$ relativi a tutti i valori di r, da 1 a m, e cerchiamo un limite superiore per la somma $\sum\limits_{r=1}^{m} \sum\limits_n \Delta_n^{(r)}$. Fra

(¹) Questi Rendiconti, gennaio, 1916. Per il caso della $f(x)$ discontinua, osserviamo che quanto è detto al n. 1 citato, dipende solo dalla semicontinuità superiore della $F(\delta)$.

tutti gli intervalli $\varDelta_n^{(r)}$ $(r=1\,,2\,,\ldots,m\,;\,n=1\,,2\,,\ldots)$ scegliamone ad arbitrio p, e indichiamoli con $\varDelta_1\,,\varDelta_2\,,\ldots,\varDelta_p$. Inscriviamo, nella curva $y=f(x)$, la poligonale π' prendendo come vertici quelli della π ed i punti corrispondenti agli estremi di $\varDelta_1\,,\varDelta_2\,,\ldots,\varDelta_p$, intendendo che i vertici di π' si seguano nello stesso ordine nel quale si presentano le loro ascisse. Indicando con π' anche la lunghezza di π', abbiamo $\pi'-\pi<\mathrm{L}-\pi$.

Detta π'_1 la parte di π' relativa ai segmenti $\varDelta_1\,,\varDelta_2\,,\ldots,\varDelta_p$, e π'_2 la rimanente, poichè ogni lato $\overline{\mathrm{P}^{(r-1)}\,\mathrm{P}^{(r)}}$ di π è minore o uguale alla parte di π'_1, che gli corrisponde, moltiplicata per $\cos\varepsilon$, più quella di π'_2, si ha

$$\pi=\sum_1^m\overline{\mathrm{P}^{(r-1)}\,\mathrm{P}^{(r)}}\leq$$

$$\leq\pi'_1\cos\varepsilon+\pi'_2=\pi'-\pi'_1(1-\cos\varepsilon)\quad,\quad\pi'_1<\frac{\pi'-\pi}{1-\cos\varepsilon}<3\,\frac{\mathrm{L}-\pi}{\varepsilon^2}\,.$$

Ed essendo $\varDelta_1+\varDelta_2+\cdots+\varDelta_p\leq\pi'_1$, ne viene, per l'arbitrarietà con cui i $\varDelta_p$ sono stati scelti, $\sum\limits_{r=1}^{m}\sum\limits_{n}\varDelta_n^{(r)}\leq 3\,\frac{\mathrm{L}-\pi}{\varepsilon^2}$ ed anche $\sum\limits_{r=1}^{m}\sum\limits_{n}\overline{\varDelta}_n^{(r)}<\varepsilon$ se è $\mathrm{L}-\pi<\frac{\varepsilon^3}{9}$. Dunque, *preso ad arbitrio un* $\varepsilon>0$ *e* <1, *è possibile di determinare un* $\delta>0$ *tale che, se è, per ogni* r *da* 1 *a* m, $x^{(r)}-x^{(r-1)}\leq\delta$ [1], *fatta eccezione, al più, per i punti di* $(a\,,b)$ *appartenenti ad un'infinità numerabile di segmenti* $\overline{\varDelta}_n^{(r)}$ [2], *di lunghezza complessiva* $<\varepsilon$, *per ogni altro* x *vale la seguente proprietà: essendo* x' *un punto qualunque, appartenente, con* x, *ad uno stesso* $(x^{(r-1)}\,,x^{(r)})$, *è*

$$\alpha(\overline{\mathrm{P}^{(r-1)}\,\mathrm{P}^{(r)}}\,,\overline{\mathrm{PP}'})<\varepsilon\,.$$

Se x'' è un altro punto di $(x^{(r-1)}\,,x^{(r)})$, si ha anche, per gli stessi x, $\alpha(\overline{\mathrm{PP}''}\,,\overline{\mathrm{PP}'})<2\varepsilon$. Allora, sostituendo ad ε, via via, $\frac{\varepsilon}{2}\,,\frac{\varepsilon}{2^2}\,,\frac{\varepsilon}{2^3}\,,\ldots$, si vede che, *fatta al più eccezione per i punti di* $(a\,,b)$ *appartenenti ad un'infinità numerabile di segmenti di lunghezza complessiva* $<2\varepsilon$, *per tutti gli altri esiste la derivata* $f'(x)$, *finita o no*: con altre parole, *la* $f'(x)$ *esiste, finita o no, quasi dappertutto.* Vediamo dove la $f'(x)$ può essere infinita. Indichiamo con l' la somma delle lunghezze di quei lati

(1) È $\mathrm{L}-\pi<\frac{\varepsilon^3}{9}$, e quindi ..... Se la $f(x)$ non è continua, non è possibile, in generale, di determinare il δ nel modo detto. In tal caso si dirà: se i punti $x^{(r)}$ sono scelti in modo che sia $\mathrm{L}-\pi<\frac{\varepsilon^3}{9}$ ....

(2) Questi $\overline{\varDelta}_n^{(r)}$ dipendono dal modo col quale si scelgono gli $x^{(r)}$.

di π che formano, con l'asse delle x, un angolo $\geq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, lati le cui proiezioni sull'asse detto hanno perciò una somma $\leq l' \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right) < < \mathrm{L} \operatorname{sen} 2\varepsilon$. Per tutti gli altri lati di π, l'angolo formato con l'asse delle x è $< \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$; e, per quanto sopra si è stabilito, tutte le corde della curva $y = f(x)$ che si proiettano interamente sulla proiezione di uno di tali lati, e in modo che uno almeno dei loro estremi venga proiettato fuori dei $\overline{\Delta}_n^{(r)}$, formano con l'asse delle x un angolo $< \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. E se ne deduce che, se x è un punto della proiezione di uno di questi lati ed è esterno ai $\overline{\Delta}_n^{(r)}$, e se in esso esiste la $f'(x)$, tale derivata è, in modulo, minore di $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Dunque, *quasi dappertutto fuori dei* $\overline{\Delta}_n^{(r)}$ *e delle proiezioni dei lati di* π *che formano* l', *cioè quasi dappertutto fuori di una successione di segmenti di lunghezza complessiva* $< \varepsilon + \mathrm{L} \operatorname{sen} 2\varepsilon$, *la derivata* $f'(x)$ *esiste determinata e finita e, in modulo, minore di* $\operatorname{cotg} \varepsilon$. Ciò prova che *una funzione a variazione limitata ha quasi dappertutto derivata finita.*

2. — Rappresentazione approssimata della $f'(x)$.

Detto p un numero intero positivo, determiniamo ω in modo che sia $\cos\left(\omega - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$ e $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Allora, per ogni ε positivo e $\leq \frac{1}{p}$, si ha $\cos(\omega - \varepsilon) \leq \frac{1}{p}$. Fissato uno degli ε detti, i lati della poligonale π, i quali formano con l'asse delle x un angolo $\geq \omega - \varepsilon$, dànno alla lunghezza di π un contributo che indicheremo con l_1, ed hanno, sull'asse detto, delle proiezioni la cui lunghezza complessiva è $< l_1 \cos(\omega - \varepsilon) < \frac{\mathrm{L}}{p}$. Quasi dappertutto sulle proiezioni dei lati rimanenti, e fuori dei $\overline{\Delta}_n^{(r)}$, la $f'(x)$ esiste ed è, in modulo, $< \operatorname{tg} \omega$.

Indichiamo con E_ε l'insieme dei punti delle proiezioni ora dette, esterni ai $\overline{\Delta}_n^{(r)}$, con $\varphi(x)$ l'ordinata della π, con $\omega_1(x)$ e $\omega_2(x)$ gli angoli che le tangenti alle curve $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ formano con l'asse delle x. È, su E_ε,

$$f'(x) - \varphi'(x) = \operatorname{tg} \omega_1 - \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\cos^2 \overline{\omega}},$$

dove $\overline{\omega}$ è un valore convenientemente scelto fra ω_1 e ω_2; e perciò (n. 1)

$$|f'(x) - \varphi'(x)| < \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega}.$$

Siccome ε lo possiamo prendere piccolo ad arbitrio, la proposizione enunciata nell'introduzione, è provata.

3. — Integrabilità di $f'(x)$.

Sull'insieme E_ε la $f'(x)$, essendo limitata ($|f'(x)| < \operatorname{tg} \omega$), è integrabile e si ha, per la disuguaglianza precedente,

$$\int_{E_\varepsilon} |f'(x)|\, dx < \int_{E_\varepsilon} |\varphi'(x)|\, dx + \frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega} < \int_a^b |\varphi'(x)|\, dx + \frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega}.$$

L'integrale di $|\varphi'(x)|$ dà evidentemente la variazione totale di $\varphi(x)$ su (a, b), variazione che è non superiore a quella V di $f(x)$. È dunque

$$\int_{E_\varepsilon} |f'(x)|\, dx < V + \frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega}.$$

Ora è $m(E_\varepsilon) > (b-a) - \frac{L}{p} - \varepsilon \geq (b-a) - \frac{1}{p}(L+1)$ e $m(E_\varepsilon) \to b-a$ per $p \longrightarrow \infty$. E poichè, per ogni p, possiamo sempre determinare ε in modo che sia $\frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega} \leq \frac{1}{p}$, ne viene che *la $|f'|$ è integrabile su tutto (a, b), e si ha*

$$\int_a^b |f'|\, dx \leq V.$$

4. — Integrale della derivata di una funzione assolutamente continua.

Se la $f(x)$ è assolutamente continua, essa è anche continua e a variazione limitata; e dalla disuguaglianza del n. 2 si ricava, su tutto E_ε,

$$f'(x) = \varphi'(x) + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega} \theta(x),$$

con $|\theta(x)| < 1$. Dunque

$$\int_{E_\varepsilon} f'\, dx = \int_{E_\varepsilon} \varphi'\, dx + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega} \int_{E_\varepsilon} \theta\, dx = \int_{E_\varepsilon} \varphi'\, dx + \frac{\varepsilon\, m(E_\varepsilon)}{\cos^2 \omega} \theta_\varepsilon,$$

con $|\theta_\varepsilon| < 1$; ed anche

$$\int_{E_\varepsilon} f'\, dx = \int_a^b \varphi'\, dx - \int_{C_\varepsilon} \varphi'\, dx + \frac{\varepsilon\, m(E_\varepsilon)}{\cos^2 \omega} \theta_\varepsilon,$$

dove C_ε indica il complementare di E_ε. E poichè la curva $y = f(x)$ è una poligonale coi vertici sulla $y = f(x)$, si ha

$$\int_a^b \varphi' \, dx = \varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a)$$

e

$$(1) \qquad \int_{E_\varepsilon} f' \, dx = f(b) - f(a) - \int_{C_\varepsilon} \varphi' \, dx + \frac{\varepsilon \, m(E_\varepsilon)}{\cos^2 \omega} \theta_\varepsilon .$$

Troviamo un limite superiore per il modulo di $\int_{C_\varepsilon} \varphi' \, dx$. Osserviamo che il gruppo C_ε è costituito di due parti: una è formata dalle proiezioni di tutti quei lati di π che con l'asse delle x fanno un angolo $\geq \omega - \varepsilon$, proiezioni che indicheremo con $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_r, b_r)$, e per le quali è $(b_1 - a_1) + \cdots + (b_r - a_r) < \frac{L}{p}$; e l'altra è composta di un insieme di punti appartenenti alle proiezioni dei lati di π che con l'asse delle x fanno un angolo $< \omega - \varepsilon$, ed ha una misura $< \varepsilon$. Il contributo di questa seconda parte in $\int_{C_\varepsilon} \varphi' \, dx$ è quindi, in modulo, $< \varepsilon \operatorname{tg} \omega$; invece quello della prima è precisamente

$$\{\varphi(b_1) - \varphi(a_1)\} + \cdots + \{\varphi(b_r) - \varphi(a_r)\} =$$
$$= \{f(b_1) - f(a_1)\} + \cdots + \{f(b_r) - f(a_r)\} .$$

È dunque

$$(2) \qquad \left| \int_{C_\varepsilon} \varphi' \, dx \right| < \varepsilon \operatorname{tg} \omega + \left| \sum_1^r \{f(b_s) - f(a_s)\} \right| .$$

Scelto un $\eta > 0$ ad arbitrio, determiniamo p in modo che si abbia: 1°) $\frac{1}{p} \leq \eta$; 2°) per qualsiasi sistema di intervalli non sovrapponentisi di (a, b): $(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)$, tali che $\sum_{s=1}^r (b_s - a_s) \leq \frac{L}{p}$,

$$(3) \qquad \left| \sum_{s=1}^r \{f(b_s) - f(a_s)\} \right| \leq \eta$$

[ciò per l'assoluta continuità della $f(x)$]; 3°) per qualsiasi insieme misurabile E di (a, b), tale che $m(E) \geq (b - a) - \frac{1}{p}(1 + L)$,

$$(4) \qquad \left| \int_E f' \, dx - \int_a^b f' \, dx \right| \leq \eta .$$

Fatto ciò, prendiamo ε uguale al minore dei due numeri $\frac{1}{p}$ e $\frac{\cos^2\omega}{p(b-a)}$. Ne viene, allora, per (1), (2), (3), (4),

$$\left|\int_a^b f'\,dx - \{f(b)-f(a)\}\right| < \eta + \frac{\operatorname{tg}\omega\,.\cos^2\omega}{p(b-a)} + \eta + \frac{1}{p}$$
$$< \eta\left(3+\frac{1}{b-a}\right).$$

Siccome η è arbitrario, resta dimostrato che, *se la $f(x)$ è assolutamente continua*, è

$$\int_a^b f'\,dx = f(b) - f(a).$$

Se, invece di partire dalla uguaglianza $f'(x) = \varphi'(x) + \frac{\varepsilon}{\cos^2\omega}\,\theta(x)$, valida su E_ε, si parte dall'altra $|f'(x)| = |\varphi'(x)| + \frac{\varepsilon}{\cos^2\omega}\,\overline{\theta}(x)$, si ottiene

$$\int_a^b |f'|\,dx = V,$$

dove V indica la variazione totale della f in (a, b).

Fisica. — *Intorno ad alcuni modi di calcolare l'esperienza di Clermont-Desormes.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.