ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

In questo caso si ha ovviamente che

$$h(t)=\frac{1}{c}\,g_1(t)=\frac{1}{c}\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,g(s)\,ds$$

è soluzione della (1) (1).

Matematica. — *Su alcune particolari quartiche piane di genere 3.* Nota di A. Terracini, presentata dal Socio C. Segre.

Vorrei mostrare in questa Nota l'esistenza di particolari quartiche piane, senza punti multipli, i cui 24 flessi godono della notevole proprietà di potersi distribuire a 4 a 4 in 6 *catene*, in modo che i 4 flessi di ciascuna *catena* appaiono come vertici di un quadrangolo semplice, ogni flesso essendo la residua intersezione della quartica colla tangente nel flesso che cade nel vertice precedente (2). Si tratta, come si vede, di una proprietà analoga a quella di cui gode la nota quartica di Klein (3), in cui i flessi si distribuiscono invece in otto catene di tre flessi ciascuna.

Il quadrangolo semplice, i cui lati, in un sistema di coordinate proiettive omogenee, hanno ordinatamente per equazione $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_1+x_2+x_3=0$, ha i suoi vertici nei 4 flessi di una catena, nel senso sopra indicato, per le C^4 rappresentate dall'equazione

$$x_1\,x_2\,x_3\,\mathrm{L}-k\,x_1\,x_2^3-k(x_2+x_3)^3\,x_2+h\,x_1^3\,x_3=0\,,$$

dove

$$\mathrm{L}=l_1\,x_1+l_2\,x_2+l_3\,x_3\,,$$

$$k=\frac{l_1+l_3-2l_2}{3}\quad,\quad h=\frac{l_1+l_2-2l_3}{3}\,.$$

(1) Il prof. Evans nota che la funzione $G_n(s)$ del Vergerio, per questo caso del nucleo non simmetrico, è identica alla funzione $g_{2n+1}(s)$ del Daniell. Però, la condizione $G_2(s)=\Gamma_0\,G(s)$ del Vergerio non è sufficiente perchè la funzione $h(t)=G_1(t)\,/\,\Gamma_0$ sia soluzione della (1), come si vede dal caso particolare seguente:

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}(s\,,t)\,h(t)\,dt\\ \mathrm{K}(s\,,t) &= \sin(s-t)\\ g(s) &= \sin s+\sin 2s\\ \pi^4\,G(s) &= G_2(s)=\pi^6\cos s\,. \end{aligned}$$

(2) La questione dell'esistenza di queste e di altre quartiche congeneri si trova posta in Ciani, *Le curve piane di quart'ordine*, Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLVIII, pp. 259-304 (ved. la pag. 302).

(3) Cfr. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, I Band, Leipzig 1890, Dritter Abschnitt, Kap. VI.

Imponiamo ora l'ulteriore condizione che la C^4 sia trasformata in sè dalle omografie cicliche del quarto ordine che trasformano in sè il quadrangolo semplice considerato, condizione che si traduce nelle

$$\begin{cases} l_2^2 + 3\,l_3^2 - 4\,l_2\,l_3 = 0, \\ 2\,l_3^2 + l_1\,l_2 - l_1\,l_3 - 2\,l_2\,l_3 = 0\,; \end{cases}$$

a cui si soddisfa assumendo l_1, l_2, l_3 proporzionali a $2, 3, 1$, oppure a $l, 1, 1$, essendo l una quantità qualunque ([1]).

Posto ora

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_1 + x_2 : x_2 + x_3 : x_3 + x_1\,,$$

l'equazione della C^4 diviene rispettivamente, nei due casi,

$$y_1^4 - 2\,y_1^3\,y_2 - 2\,y_1\,y_2^3 - y_2^4 - y_1^2\,y_3^2 + y_2^2\,y_3^2 = 0\,,$$

$$\begin{aligned}(5\,l - 2)\,(y_1^4 + y_2^4) + 6\,(l - 2)\,y_1^2\,y_2^2 - 8\,(l - 1)\,y_1\,y_2\,(y_1^2 - y_2^2) - \\ - 6\,l\,(y_1^2 + y_2^2)\,y_3^2 + (l + 2)\,y_3^4 = 0\,.\end{aligned}$$

La prima di queste due equazioni rappresenta una quartica avente un punto doppio, quartica che escluderemo dal seguito delle nostre considerazioni; ed escluderemo pure la quartica rappresentata dalla seconda equazione dove si faccia $l = 1$, quartica costituita dai quattro lati del quadrangolo semplice considerato; invece la stessa equazione per $l \neq 1$ rappresenta quartiche tutte irriducibili.

Poniamo ora

$$y_1 : y_2 : y_3 = a\,y_1' + b\,y_2' : c\,y_1' + d\,y_2' : y_3'\,,$$

con

$$ad - bc \neq 0\,,$$

e cerchiamo anzitutto di far scomparire dall'equazione trasformata le potenze dispari delle coordinate. Dovranno allora soddisfarsi le condizioni:

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ (5\,l - 2)\,(a^3\,b + c^3\,d) - 2\,(l - 1)\,(a^3\,d - bc^3 + 3\,a^2\,bc - 3\,ac^2\,d) + \\ \qquad + 3\,(l - 2)\,(a^2\,cd + abc^2) = 0 \\ (5\,l - 2)\,(a\,b^3 + c\,d^3) - 2\,(l - 1)\,(b^3\,c - ad^3 + 3\,ab^2\,d - 3\,bcd^2) + \\ \qquad + 3\,(l - 2)\,(b^2\,cd + abd^2) = 0. \end{cases}$$

Posto $a = 1$, risulta $b = -cd$; e quindi, poichè d è $\neq 0$, le ultime due condizioni si riducono all'unica

$$(5l - 2)\,(c^3 - c) - 2\,(l - 1)\,(1 - 6c^2 + c^4) + 3\,(l - 2)\,(c - c^3) = 0\,,$$

([1]) Si può supporre che l sia finita, perchè la C^4, per cui $l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 0 : 0$, non ha importanza per le nostre ulteriori considerazioni.

cioè

(1) $(l-1)c^4-(l+2)c^3-6(l-1)c^2+(l+2)c+l-1=0$.

E poichè dev'essere $ad-bc=d(1+c^2)\neq 0$, e quindi $c^2\neq -1$, dovremo supporre l tale che quest'uguaglianza possa soddisfarsi altrimenti che per $c=\pm i\,(i=\sqrt{-1})$: ossia sarà

$$l\neq\frac{14\mp 12i}{17}\ ,\quad \text{cioè}\quad 17l^2-28l+20\neq 0.$$

Volendo inoltre che l'equazione trasformata sia simmetrica in y'_1, y'_2, dovremo poi porre $d=\pm 1$; otteniamo, così,

$$[(5l-2)c^4+8(l-1)c^3+6(l-2)c^2-8(l-1)c+5l-2](y_1'^4+y_2'^4)+$$
$$+6[(l-2)c^4-8(l-1)c^3+2(3l+2)c^2+8(l-1)c+l-2]\,y_1'^2y_2'^2-$$
$$-6l(1+c^2)(y_1'^2+y_2'^2)\,y_3'^2+(l+2)\,y_3'^4=0.$$

Poniamo infine

$$y'_1:y'_2:y'_3=uz_1:uz_2:z_3,$$

per ottenere un'equazione simmetrica nelle tre nuove coordinate: basterà determinare u in modo che sia $u^4\mathrm{M}=l+2$, $u^2\mathrm{P}=-l(1+c^2)$, dove M e P indicano i coefficienti di $y_1'^4+y_2'^4$, e di $6y_1'^2y_2'^2$ nell'ultima equazione scritta. E, affinchè ciò sia possibile, è necessario e sufficiente [1] che sia

$$\text{(2)}\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{M} & l+2 \\ \mathrm{P}^2 & l^2(1+c^2)^2 \end{vmatrix}=0.$$

Ora, tenuto conto della (1), quest'equazione si può, con successive riduzioni, trasformare nella

$$\text{(3)}\qquad (l+2)(9l^3-45l^2+60l-36)(1-2c^2+c^4)+$$
$$+(77l^4-44l^3-116l^2+224l-96)(c-c^3)+$$
$$+(l-1)(3l-2)(-12l^2+16l-16)c^2=0.$$

Per cercare le condizioni di compatibilità di questa equazione colla (1), poniamo $c-\dfrac{1}{c}=\theta$, cosicchè la (1) e la (3) divengono rispettivamente

$$\text{(1')}\qquad (l-1)\theta^2-(l+2)\theta-4(l-1)=0$$

e

$$\text{(3')}\qquad (l+2)(9l^3-45l^2+60l-36)\theta^2-$$
$$(77l^4-44l^3-116l^3+224l-96)\theta-4(l-1)(3l-2)(3l^2-4l+4)=0.$$

[1] La condizione è anche sufficiente, poichè non possono M e P essere contemporaneamente nulli (la quartica conterrebbe allora doppiamente la retta $y'_3=0$, il che è assurdo).

Eliminando θ ed escludendo sempre per l il valore 1, si trova per l la condizione

$$\begin{aligned}[-(l-1)(77\,l^4-44\,l^3-116\,l^2+224\,l-96)+\\+(l+2)^2(9\,l^3-45\,l^2+60\,l-36)]\times\\\times[(l+2)(3l-2)(3l^2-4l+4)-(77\,l^4-44\,l^3-116\,l^2+224\,l-96)]=\\=64(l-1)(17\,l^2-28\,l+20)^2.\end{aligned}$$

Dividendo i due membri per $16(17\,l^2-28\,l+20)^2$, il che è lecito poichè, come abbiamo avvertito sopra, dobbiamo supporre non nulla l'espressione che sta in parentesi, troviamo infine

$$(l^3-l+3)(l^2+l-1)=4(l-1),$$

ossia:

$$l^5+l^4-2\,l^3+2\,l^2+1=0, \tag{4}$$

equazione che si verifica facilmente essere irriducibile. Il valore di θ, che è radice comune delle (1′) e (3′), risulta poi

$$\theta=-(l^2+l-1). \tag{5}$$

L'equazione della C^4 assume pertanto la forma

$$z_4^4+z_2^4+z_3^4+6\,\varrho(z_2^2z_3^2+z_3^2z_1^2+z_1^2z_2^2)=0 \tag{6}$$

con

$$\varrho=\frac{-l(1+c^2)}{l+2}u^2=\frac{l^2(1+c^2)^2}{(l+2)\,\mathrm{P}},$$

dove i valori di l e di θ (e quindi anche di c) si desumono dalle (4), (5). Con successive riduzioni si trova

$$\varrho=\frac{2\,l^4-5\,l^3+4\,l^2-1}{2\,l^4+3\,l^3+4\,l^2-12\,l+15}. \tag{7}$$

Il risultato dell'eliminazione di l fra le (5) e (7) è

$$\begin{vmatrix}-\varrho-7 & -8\varrho+8 & 16\varrho-4 & -15\varrho-1 & 2\varrho-2\\ -8\varrho+8 & 6\varrho-10 & 3\varrho+9 & -13\varrho-3 & 3\varrho+5\\ 16\varrho-4 & 3\varrho+9 & -29\varrho-11 & 33\varrho+7 & 4\varrho-4\\ -15\varrho-1 & -13\varrho-3 & 33\varrho+7 & -26\varrho-6 & -12\varrho\\ 2\varrho-2 & 3\varrho+5 & 4\varrho-4 & -12\varrho & 15\varrho+1\end{vmatrix}=0,$$

ossia

$$180\,\varrho^5-368\,\varrho^4+109\,\varrho^3+21\,\varrho^2-5\,\varrho-1=0. \tag{8}$$

Anche quest'equazione è irriducibile: le sue cinque radici sostituite nella (6) conducono ad altrettante C^4, senza punti multipli [1], i cui flessi si distribuiscono precisamente in sei catene del tipo richiesto. Infatti ciascuna di quelle C^4 è invariante pel gruppo ottaedrico delle proiettività rappresentate da

$$\begin{pmatrix} \pm z_i & \pm z_j & \pm z_k \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

dove $i\,j\,k$ indica una permutazione degli indici 1, 2, 3; e su di essa vi sono già quattro flessi appartenenti a una catena, siano $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$. Ogni ulteriore flesso F si può ottenere da uno qualsiasi di questi quattro, per es. da A_1 mediante una proiettività π del gruppo, perchè nell'ipotesi contraria dovrebbe A_1 essere unito in una proiettività non identica del gruppo, che muterebbe in sè anche la tangente in A_1 e quindi A_2, A_3 e A_4, il che è assurdo: quella proiettività π muterà dunque la catena $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ in una analoga a cui appartiene il flesso F.

Le cinque C^4 trovate sono a due a due proiettivamente distinte: infatti gli invarianti A e B, rispettivamente del terzo e del sesto ordine nei coefficienti, per una quartica rappresentata dalla (6) valgono [2]

$$1 + 9\varrho^2 + 6\varrho^3 \quad \text{e} \quad \varrho^3(1 - 3\varrho^2 + 2\varrho^3).$$

Se due fra quelle cinque C^4 si potessero trasformare l'una nell'altra mediante una proiettività, dovrebbe l'invariante assoluto

$$\frac{A^2}{B} = \frac{(1 + 9\varrho^2 + 6\varrho^3)^2}{\varrho^3(1 - 3\varrho^2 + 2\varrho^3)}$$

acquistare lo stesso valore per due diverse radici della (8), e quindi, data l'irriducibilità di questa equazione, per tutte le sue radici. E si verifica che così non è, osservando che i resti delle divisioni di A e di B pel primo membro della (8) non dànno un rapporto costante.

Concludiamo dunque: *esistono cinque* C^4 *senza punti multipli, proiettivamente distinte, i cui flessi si distribuiscono in sei quaterne* (*catene*) *in modo che i quattro flessi di ciascuna quaterna sono vertici di un quadrangolo, ogni flesso essendo la residua intersezione della* C^4 *colla tangente nel flesso che cade nel vertice precedente. Esse sono invarianti per un gruppo ottaedrico di proiettività: le loro equazioni si ottengono dalla* (6), *ponendo per* ϱ *una delle radici della* (8).

[1] Infatti quelle cinque C^4 sono irriducibili; e la sola C^4 irriducibile rappresentata dalla (6) e dotata di punti doppî si ottiene per $\varrho = \infty$.

[2] Cfr. Salmon, *Traité de géométrie analytique: courbes planes* (trad. par O. Chemin, Paris 1903); ved. il num. 299.