ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 febbraio 1916.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul differenziale dell'arco di curva.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Data una curva continua e rettificabile

$$C: \qquad x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

se le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono assolutamente continue, la lunghezza $s(t)$ del suo arco, corrispondente all'intervallo (a, t), è data dall'integrale classico

$$(1) \qquad s(t) = \int_a^t \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(s)}^2 + \overline{z'(t)}^3}\, dt \quad (1).$$

Da ciò si deduce, differenziando, che è *quasi dappertutto*

$$(2) \qquad \overline{ds}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2.$$

Nelle pagine che seguono dimostreremo [senza far uso della (1)] che questa formola è del tutto generale, vale a dire che essa sta tutte le volte che la curva C è rettificabile, siano o no le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ assolutamente continue. Daremo poi una formula per l'espressione di $s(t)$, dalla quale scenderà, nell'ipotesi sopra ricordata, la (1).

(1) L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLIII, 1908).

1. Inscriviamo nella C una poligonale π, di vertici consecutivi $P^{(0)}$, $P^{(1)}, \dots, P^{(m)}$, corrispondenti ai valori $t^{(0)} = a < t^{(1)} < \dots < t^{(m)} = b$ del parametro t. Detta $s^{(r)}$ la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P^{(0)}\,P^{(r)}}$ della C, ad ogni valore di s compreso fra $s^{(r-1)}$ e $s^{(r)}$ corrisponde un punto P dell'arco $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$, e ad ogni intervallo $\delta \equiv (s, s')$ di $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$ corrisponde un arco $\overset{\frown}{PP'}$ di $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$, di lunghezza δ. Scelto ad arbitrio un numero positivo ε, consideriamo la funzione dell'intervallo δ

$$F(\delta) = 1 - \frac{PP'}{s(PP')} - \varepsilon,$$

dove PP' indica la lunghezza della corda PP' e $s(PP')$ quella dell'arco $\overset{\frown}{PP'}$ della C. Costruiamo per questa funzione $F(\delta)$, e relativamente all'intervallo $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$, i sistemi d'intervalli Δ e $\overline{\Delta}$ definiti nel n. 1 della mia Nota *Successione di curve e derivazione per serie* (1), e contrassegniamo tali intervalli con l'indice r, scrivendo $\Delta^{(r)}$ e $\overline{\Delta}^{(r)}$. Avremo, per ogni arco $\overset{\frown}{PP'}$, corrispondente a un $\Delta^{(r)}$, $1 - \frac{PP'}{s(PP')} \geq \varepsilon$, e, per ogni altro appartenente a $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$ e tale che P sia esterno a tutti gli archi che corrispondono ai $\overline{\Delta}^{(r)}$, $1 - \frac{PP'}{s(PP')} < \varepsilon$. Inscriviamo in C una nuova poligonale π' servendoci dei vertici di π e dei punti corrispondenti agli estremi di un gruppo d'intervalli, comunque scelti in numero finito fra i $\Delta_n^{(r)}$ ($r = 1, 2 \dots m$; $n = 1, 2, \dots$). Indicando con L la lunghezza della C, e con gli stessi simboli π e π' le lunghezze delle poligonali π e π', abbiamo $L - \pi' < L - \pi$. Detta ora π_1' quella parte di π' che corrisponde agli intervalli $\Delta_n^{(r)}$ scelti, sia L_1 la somma degli archi di C relativi agli stessi intervalli. Si ha, dalla prima delle disuguaglianze sopra scritte, moltiplicando per $s(PP')$ e sommando, $L_1 - \pi_1' \geq \varepsilon L_1$, ed anche, essendo $L_1 - \pi_1' < L - \pi' < L - \pi$, $L_1 < \frac{1}{\varepsilon}(L - \pi)$; e siccome L_1 non è che la somma dei segmenti $\Delta_n^{(r)}$ scelti per costruire π', abbiamo

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{n} \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq \frac{1}{\varepsilon}(L - \pi) \quad \text{e} \quad \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq 3\,\Delta_n^{(r)}, \quad \sum_{r=1}^{m} \sum_{n} \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq \frac{3}{\varepsilon}(L - \pi).$$

Conveniamo di prendere per poligono π quello che, fra i poligoni corrispondenti a divisioni di C in archi di ugual lunghezza e soddisfacenti alla

(1) Questi Rendiconti, gennaio 1916.

$L - \pi < \frac{1}{3}\varepsilon^2$, ha il minor numero di lati. È allora $\sum_{r=1}^{m} \sum_{n} \overline{\Delta}_n^{(r)} < \varepsilon$, e, eccettuati al più i vertici di π ed i punti P appartenenti agli archi di C che corrispondono agli intervalli $\overline{\Delta}_n^{(r)}$, è $1 - \frac{PP'}{s(PP')} < \varepsilon$, essendo P' un punto qualsiasi dell'arco $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$ del quale fa parte P. Sostituendo, via via, ad ε, i valori $\frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^p}, \ldots$, si vede che, eccettuati al più i vertici dei poligoni π così determinati ed i punti P di C che fanno parte di un sistema numerabile di archi di lunghezza complessiva $< 2\varepsilon$, è $1 - \lim_{P' \to P} \frac{PP'}{s(PP')} = 0$. Da ciò si conclude che è quasi dappertutto (come è ben noto)

$$\lim_{P' \to P} \frac{PP'}{s(PP')} = 1. \tag{3}$$

2. Indichiamo con Ω_s l'insieme dei punti P di C nei quali non è verificata la (3). Per quanto si è visto or ora, quest'insieme può essere rinchiuso in una successione di archi non sovrapponentisi di C, di misura complessiva piccola a piacere; in altre parole, la sua misura, contata sulla curva stessa, è nulla. Sia Ω_t l'insieme di (a, b) che corrisponde a Ω_s nella corrispondenza determinata dalla funzione $s = s(t)$ fra i due segmenti (a, b) e $(0, L)$. Per tale corrispondenza, ad ogni punto t di (a, b) corrisponde un punto, ed uno solo, s di $(0, L)$, mentre ad ogni s di $(0, L)$ corrisponde o un punto t oppure un intero segmento di (a, b). Ad ogni intervallo (s_1, s_2) di $(0, L)$ corrisponde poi sempre un intervallo (t_1, t_2) di (a, b), ed è $s_2 - s_1 \geq \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$, perchè la $s(t)$, come funzione non decrescente, è a variazione limitata ed ha perciò, quasi dappertutto, la dirivata $s'(t)$ integrabile e ≥ 0. Ad ogni successione di archi non sovrapponentisi di C, ricoprenti Ω_s, corrisponde una successione di segmenti di (a, b) $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ non sovrapponentisi e ricoprenti Ω_t; e si ha, se σ è la somma delle lunghezze degli archi della successione detta, $\sigma \geq \Sigma \int_{\delta_r} s'(t)\,dt$. Si scelga arbitrariamente un numero positivo ε e si prenda, come successione di archi di C ricoprenti Ω_s, l'ultima successione considerata nel numero precedente (la quale è di misura $< 2\varepsilon$) e ad essa si aggiunga la successione dei vertici dei poligoni π là determinati. Si faccia poi la medesima costruzione sostituendo $\frac{\varepsilon}{2}$ ad ε; poi ancora per $\frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^p}, \ldots$. La successione di archi di C corrispondente

a p avrà, per somma delle sue lunghezze, $\sigma_p = \frac{\varepsilon}{2^{p-1}}$; onde $\sigma_p \longrightarrow 0$ per $p \longrightarrow \infty$. Alla successione degli archi di C e a quella dei vertici dei poligoni π, ambedue relative a p, corrisponderà una successione $\delta_1^{(p)}, \delta_2^{(p)}, \ldots, \delta_r^{(p)}, \ldots$ di segmenti non sovrapponentisi di (a, b) (alcuni dei quali — quelli che corrispondono ai vertici dei π — possono ridursi a punti) ricoprenti Ω_t e formanti complessivamente un insieme misurabile di punti, che indicheremo con $E_t^{(p)}$. Sia E_t l'insieme dei punti comuni a tutti questi $E_t^{(p)}$. E_t è misurabile e contiene Ω_t; ed è $\sigma_p \geq \sum_r \int_{\delta_r^{(p)}} s'(t)\, dt \geq \int_{E_t} s'(t)\, dt$. Essendo $\sigma_p \longrightarrow 0$, è $\int_{E_t} s'(t)\, dt = 0$. Dunque *su* E_t, *e quindi anche su* Ω_t, *è quasi dappertutto* $s'(t) = 0$.

3. Ciò premesso, sia t un punto di (a, b) non appartenente all'insieme $\Omega_t + I$, dove I è l'insieme di misura nulla sul quale una almeno delle derivate $x'(t), y'(t), z'(t), s'(t)$ non esiste finita. Sia poi t_1 un altro punto qualsiasi di (a, b). Detti P e P_1 i punti corrispondenti di C, è $\{x(t_1) - x(t)\}^2 + \{y(t_1) - y(t)\}^2 + \{z(t_1) - z(t)\}^2 = \overline{PP_1}^2$. Dividendo (se non è $PP_1 = 0$) tutto per $(t_1 - t)^2$ e moltiplicando e dividendo il secondo membro per $\{s(t_1) - s(t)\}^2$, si ha al limite, per $t_1 \longrightarrow t$, tenendo conto di (3), $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2 = \{s'(t)\}^2$, uguaglianza valida per ogni t esterno a $\Omega_t + I$. Se poi t appartiene a Ω_t, pur essendo sempre esterno a I, si ha $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2 \leq \{s'(t)\}^2$, e qui vale ancora quasi dappertutto il segno di uguaglianza, perchè, quasi dappertutto, su Ω_t è $s'(t) = 0$. Concludendo: *Se la curva continua* C *è rettificabile, vale a dire se le* $x(t), y(t), z(t)$ *sono funzioni continue, a variazione limitata, vale quasi dappertutto la* $\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 = \overline{ds}^2$.

4. L'uguaglianza precedente, tenendo conto della disuguaglianza

$$s_2 - s_1 \geq \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt\,,$$

valida anch'essa in ogni caso, dà

$$s(t) \geq \int_a^t \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt\,.$$

E poichè nella disuguaglianza ricordata vale il segno di uguaglianza se, e solamente se, la $s(t)$ è assolutamente continua, altrettanto si dirà per la validità di (1). Ricordato, allora, che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la $s(t)$ sia assolutamente continua è che siano tali le $x(t)$, $y(t), z(t)$, si ritrova, per la validità della (1), esser necessario e sufficiente che le $x(t), y(t), z(t)$ siano assolutamente continue.

5. Ritornando al caso generale, del quale si sa solo che le $x(t), y(t), z(t)$ sono continue e a variazione limitata, indichiamo con E l'insieme (necessariamente di misura nulla) nel quale una almeno delle derivate x', y', z' non esiste finita. Rinchiudiamo, nel senso stretto (fatta, al più, eccezione per a e b), i punti di E in una successione di intervalli, non sovrapponentisi, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ (1), e definiamo in (a, b) la funzione $X(t)$ nel seguente modo: *fuori degli intervalli* δ, *e nelle loro estremità*, poniamo $X(t) = x(t)$ e in ciascun δ facciamo variare la $X(t)$ linearmente. La $X(t)$ risulta così continua e a variazione limitata [con una variazione totale non superiore a quella di $x(t)$] ed ha in ogni punto la derivata destra finita, la quale, fuori dei δ_r, coincide con $x'(t)$ (2). In modo analogo si definiscano le funzioni $Y(t), Z(t)$. Queste X, Y, Z, avendo le derivate destre sempre finite ed essendo a variazione limitata, sono anche assolutamente continue, e per la curva $\overline{C}$, che esse definiscono, vale dunque la (1). Si ha pertanto, indicando con Γ il complementare dell'insieme formato dai punti di tutti i δ_r, e con $S(b)$ la lunghezza della $\overline{C}$,

$$S(b) = \int_\Gamma \sqrt{|X'(t)|^2 + |Y'(t)|^2 + |Z'(t)|^2}\, dt +$$

$$+ \sum_r \int_{\delta_r} \sqrt{|X'(t)|^2 + |Y'(t)|^2 + |Z'(t)|^2}\, dt .$$

Ma in Γ è $X' = x'$, $Y' = y'$, $Z' = z'$, e su $\delta_r \equiv (\alpha_r, \beta_r)$ le X, Y, Z variano linearmente; si ha, perciò,

$$S(b) = \int_\Gamma \sqrt{\overline{x'(s)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt +$$

$$+ \sum_r \sqrt{|x(\beta_r) - x(\alpha_r)|^2 + |y(\beta_r) - y(\alpha_r)|^2 + |z(\beta_r) - z(\alpha_r)|^2} .$$

Al tendere di $\Sigma \delta_r$ a zero è

$$\int_\Gamma \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \longrightarrow \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

ed è anche $S(b) \longrightarrow s(b)$, perchè, da una parte, è sempre $S(b) < s(b)$, e, dall'altra, essendo $\overline{C}$ la curva limite della C, il minimo limite di $S(b)$ non può essere inferiore a $s(b)$. Esiste dunque il limite anche per $\sum_r \sqrt{\ldots}$,

(1) Dunque ogni punto di E, fatta eccezione al più per a e b, è *interno* ad un intervallo δ, oppure è l'estremo comune di due δ contigui.

(2) Cfr. il n. 5 della mia Nota *Successioni di curve e derivazione per serie*, Nota II (questi Rendiconti, gennaio 1916).

e questo limite, che indicheremo con $l(b)$, è indipendente dal modo nel quale sono stati scelti i δ_r (purchè rinchiudano sempre, nel senso stretto, l'insieme E) ed anche da quello nel quale si fa tendere a zero $\Sigma\delta_r$; e si ha, poichè a b si può sostituire un t qualunque di (a, b),

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt + l(t),$$

dove $l(t)$ *(che può chiamarsi la lunghezza della parte di* C *relativa all'insieme* E_t*) è il limite della somma delle corde di* C *corrispondenti ad una successione qualsiasi d'intervalli di* (a, b) *che ricoprono, nel senso stretto, l'insieme* E_t *dei punti di* (a, t) *ove una almeno delle* x', y', z' *non esiste finita; ed il limite è ottenuto facendo tendere a zero, in modo del tutto arbitrario, la somma degli intervalli considerati.*

6. Se la curva continua e rettificabile C è definita dall'equazione $y = f(x)$, considerata per tutti gli x di (a, b), la formula precedente diventa

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \overline{f'(x)}^2} + l(x),$$

e $l(x)$ risulta anche uguale alla variazione totale della $f(x)$ nell'insieme E_x dei punti di (a, x) nei quali la $f'(x)$ non esiste finita: vale a dire, al limite di $\Sigma|f(\beta_r) - f(\alpha_r)|$, per $\Sigma(\beta_r - \alpha_r) \longrightarrow 0$, dove gli (α_r, β_r) costituiscono una successione d'intervalli non sovrapponentisi, ricoprenti, nel senso stretto, l'insieme E_x (1).

Consideriamo, come esempio, la curva continua definita dalla seguente funzione: detto E il noto insieme di Cantor, formato coi punti dell'intervallo $(0, 1)$ di ascissa $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$, dove i numeratori a non possono prendere che i valori 0 e 2, poniamo

$$f\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\right);$$

poniamo, poi, che la $f(x)$ resti costante negli intervalli contigui a E. L'insieme E è perfetto e di misura nulla, e la funzione $f(x)$ (che è quella di cui si è servito il Cantor per dimostrare che E ha la potenza del continuo, e della quale è facile dare una espressione analitica completa) è continua, non decrescente, ed assume negli estremi di $(0, 1)$ i valori 0 e 1; inoltre, essendo costante in ogni intervallo contiguo ad E, essa ha quasi

(1) Basta, infatti, osservare che è

$$|f(\beta_r) - f(\alpha_r)| < \sqrt{(\beta_r - \alpha_r)^2 + |f(\beta_r) - f(\alpha_r)|^2} \leq (\beta_r - \alpha_r) + |f(\beta_r) - f(\alpha_r)|.$$

dappertutto derivata nulla. La sua lunghezza è data dalla formula sopra scritta. E si ha facilmente $l(1) = 1$, e quindi $s(1) = 2$.

7. *Le cose qui dette per le curve continue rettificabili valgono tutte* (come si vede aggiungendo ai ragionamenti fatti qualche facile riflessione) (1) *anche per le curve semplicemente rettificabili, definite cioè dalle equazioni* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $(a \leq t \leq b)$, *o dall'altra* $y = f(x)$ *in* $(a \leq x \leq b)$, *dove le* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $f(x)$ *sono funzioni a variazione limitata* (*non necessariamente continue*).

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Intorno ad alcuni modi di calcolare l'esperienza di Clermont-Desormes.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Per ottenere dall'esperienza di Clément e Desormes l'espressione del rapporto $k = c_p / c_v$ dei calori specifici d'un gaz a pressione costante ed a volume costante, si seguono di solito due metodi: uno, dovuto, credo, al Poisson, che suppone la conoscenza della legge delle variazioni adiabatiche di stato e quindi quelle del primo principio di termodinamica e del calcolo non elementare che serve per ottenere tale legge; l'altro, seguìto in quasi tutti i trattati di Fisica, che non richiede tali conoscenze, ma che, sebbene elementare, riesce più complicato e più difficile da seguire e a rammentare.

In una Nota precedente (2) ho indicato un metodo di calcolo che, sebbene forse non differisca essenzialmente da quest'ultimo, mi pare più breve e più facile e diretto, ma che però non ha ottenuto l'approvazione del prof. Guido Grassi, il quale trova (3) che ho equivocato, che il mio calcolo è inesatto e che solo, pare, per un caso fortunato sono giunto alla solita espressione del suddetto rapporto, pur basandomi sopra un equivoco ed usando formule inesatte.

Credo necessario ripetere, brevemente, ancora una volta, il mio ragionamento, completandolo con l'aggiunta di qualche schiarimento.

(1) Occorrerà però qualche avvertenza nella definizione di $l(t)$ e di $l(x)$.

(2) Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1914.

(3) Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1915.