ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Successioni di curve e derivazione per serie.* Nota I di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

Mi propongo di dimostrare il seguente teorema:

Se $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ *è una successione di curve continue, rettificabili, tendenti ad un'altra curva, continua e rettificabile,* C, *in modo che la lunghezza della* C_n *tenda a quella, supposta finita, della* C, *le tangenti della* C_n *tendono in misura alle tangenti della* C.

Questa proposizione permette di dimostrare che:

a) *Sotto le stesse ipotesi, è*

$$\int_{C_n} F(x, y, z, x', y', z')\, ds_n \longrightarrow \int_C F(x, y, z, x', y', z')\, ds,$$

dove la F soddisfa a certe condizioni, che saranno precisate più innanzi (n. 6), le quali sono più generali di quelle sotto cui tale proposizione fu già da me stabilita altrove, per via del tutto diversa [1].

b) *Supposto*: 1°) *che la successione di funzioni, date su* (a, b), $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ *converga quasi dappertutto verso una funzione* $u(x)$; 2°) *che la lunghezza della curva* $y = u_n(x)$ *tenda a quella, supposta finita, di* $y = u(x)$; 3°) *che la successione delle derivate (considerate là dove esistono)* $u'_1(x), u'_2(x), \ldots, u'_n(x), \ldots$ *sia quasi dappertutto convergente; è quasi dappertutto* $\lim_{n\to\infty} u'_n(x) = u'(x)$. Come caso particolare si ritrova il teorema dato recentemente da G. Fubini [2]: *se* $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, definite in* (a, b), *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie.* E vogliamo notare che di questa proposizione si ha così una dimostrazione diretta, indipendente cioè dall'integrazione per serie e dal concetto d'integrale.

Per giungere al primo teorema sopra enunciato, riprenderemo la proposizione, dovuta a H. Lebesgue, secondo la quale una curva continua, rettificabile, ha tangente quasi dappertutto; dandone una dimostrazione indipendente dal concetto di misura e da quello di integrale. Già in questo senso la dimostrazione della proposizione detta fu ripresa, nel 1909, da G. Faber [3], il quale raggiunse lo scopo dimostrando dapprima che una funzione a rapporto incrementale limitato ha derivata quasi dappertutto, e poi che il li-

[1] Questi Rendiconti, maggio 1912.

[2] Questi Rendiconti, febbraio 1915.

[3] Math. Ann., 1910 (B. 69).

mite del rapporto fra la corda e l'arco di una curva rettificabile tende quasi dappertutto all'unità, e deducendo infine la voluta proposizione dall'equazione $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$. La nostra dimostrazione è più diretta di quella del Faber, in quanto non ha bisogno di passare per le proposizioni intermedie sopra ricordate; e serba, inoltre, un carattere puramente geometrico.

1. Sia $F(\delta)$ una funzione definita per ogni intervallo *non nullo* δ di (a, b), e sempre continua: in altre parole, la $F(\delta)$ è una funzione degli estremi x_1 e x_2 di δ, definita e continua in tutto il campo determinato dalle disuguaglianze $x_1 < x_2$, $a \leq x_1$, $x_2 \leq b$. Ad ogni punto di questo campo corrisponde un δ non nullo di (a, b), e viceversa. Sia E l'insieme dei punti del campo detto, nei quali è $F(\delta) \geq 0$; e indichiamo con l il limite superiore della differenza $x_2 - x_1$ su E. Il sottogruppo di questo insieme, definito dalla disuguaglianza $x_2 - x_1 \geq \frac{1}{2} l$, è *chiuso*; in esso, perciò, $x_2 - x_1$ raggiunge il suo massimo. Fra i punti di massimo, si consideri quello per il quale x_1 è minimo, e si indichi con Δ_1 l'intervallo di (a, b) che gli corrisponde. Δ_1 è dunque il più a sinistra dei massimi intervalli δ per i quali è $F(\delta) \geq 0$: e perchè esista, è necessario e basta che esista almeno un δ per il quale la $F(\delta) \geq 0$ risulti verificata. Sia poi Δ_2 il più a sinistra dei massimi intervalli δ che hanno al più in comune con Δ_1 un estremo e per i quali è $F(\delta) \geq 0$; sia ancora Δ_3 il più a sinistra dei massimi intervalli δ che hanno al più un estremo in comune con Δ_1, e così pure con Δ_2, e per i quali è ancora $F(\delta) \geq 0$; e così via indefinitamente, o finchè la determinazone dei Δ_m è possibile. Si ottiene così un numero finito o un'infinità numerabile di intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_m, \ldots$ i quali godono delle seguenti proprietà: *a*) due qualunque di essi hanno al più un estremo in comune; *b*) indicando con lo stesso simbolo Δ_m anche la lunghezza dell'intervallo, è $\Delta_m \geq \Delta_{m+1}$; *c*) è $F(\Delta_m) \geq 0$; *d*) se δ è un intervallo qualunque di (a, b) che non coincide con nessun Δ_m e che ha entrambi gli estremi *non interni* ai Δ_m, è $F(\delta) < 0$. Per dimostrare questa ultima proprietà, osserviamo che uno qualsiasi dei δ, che qui si considerano, non può contenere, di un Δ_m, più di un punto senza contenerlo interamente; ed allora, se δ contiene qualche Δ_m, detto $\overline{m}$ il minor indice dei Δ interni a δ, ne viene $F(\delta) < 0$ per la definizione stessa di $\Delta_{\overline{m}}$. Se poi δ non contiene nessun Δ_m, deve essere $F(\delta) < 0$ perchè, altrimenti, i Δ_m sarebbero in numero infinito, si avrebbe sempre $\Delta_m \geq \delta$ e la $\Sigma \Delta_m$ sarebbe divergente, mentre le sue somme parziali sono sempre $\leq b - a$. Il gruppo dei Δ_m, così determinato, lo diremo *sistema degli intervalli* Δ, *relativo alla funzione* $F(\delta)$ *e all'intervallo* (a, b). Ricordiamo che questo sistema esiste effettivamente sotto la sola condizione che esista almeno un δ tale che $F(\delta) \geq 0$.

Costruiamo ora, per ogni Δ_m, un segmento $\bar{\Delta}_m$, di lunghezza tripla e avente il centro in comune con Δ_m, avvertendo però di sopprimere quelle sue parti che eventualmente venissero a trovarsi fuori di (a, b). Per tale sistema, dimostriamo che, *se δ è un intervallo di (a, b) avente almeno un estremo esterno a tutti gli intervalli $\bar{\Delta}$, è* $F(\delta) < 0$. Osserviamo che quello dei due estremi di δ che è esterno a tutti i $\bar{\Delta}$ risulta anche esterno a tutti i Δ. Se, allora, l'altro estremo non è interno a qualche Δ, la proposizione scende dalla proprietà d). Nel caso contrario, detto Δ_m l'intervallo a cui quest'altro estremo è interno, dovrà essere $\delta > \Delta_m$ (per il modo nel quale si è costruito $\bar{\Delta}_m$ e per essere un estremo di δ esterno a $\bar{\Delta}_m$); e questa disuguaglianza mostra che, se δ non contiene dei Δ di indice $< m$, deve aversi $F(\delta) < 0$, per la definizione stessa di Δ_m. Che se poi, di tali intervalli, δ ne contenesse almeno uno, detto $\Delta_{m'}$ quello di indice minore $(m' < m)$, dovrebbe essere $F(\delta) < 0$ per la stessa definizione di $\Delta_{m'}$. È bene osservare, per il seguito, che è $\Sigma \bar{\Delta}_m \leq 3 \Sigma \Delta_m$, e che, se i $\bar{\Delta}$ non esistono (il che avviene solo se non esistono neppure i Δ), la $F(\delta) < 0$ risulta sempre verificata.

2. Sia C una curva continua e rettificabile, di lunghezza L e di estremi (primo e secondo) A e B (i quali coincidono se la curva è chiusa). Detto P un punto arbitrariamente scelto in C, si indichi con s la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ di C; detto poi P' un altro punto di C, si indichi con $\overline{PP'}$ tanto la corda che congiunge P e P' quanto la lunghezza della corda medesima. Su ogni corda $\overline{PP'}$, si dirà senso positivo quello che va dall'estremo che precede a quello che segue, nell'ordine stabilito dal senso positivo della curva. Date due corde $\overline{PP'}$, $\overline{P_1P_1'}$, diremo loro angolo quello, compreso fra 0 e π (estremi inclusi), delle loro direzioni positive, e lo indicheremo con $\alpha(\overline{PP'}, \overline{P_1P_1'})$. Ciò premesso, si fissi, sulla curva C, un sistema di punti $A \equiv P^{(0)} < P^{(1)} < P^{(2)} < \cdots < P^{(p)} \equiv B$ (¹) e si consideri la poligonale π inscritta in C e avente questi punti come vertici successivi. Si indicherà con la stessa lettera π anche la lunghezza di tale poligonale (lunghezza $\leq L$). Si prendano a considerare un lato generico di π, $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$, e l'arco $\widehat{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ di C. Dette $s^{(r-1)}, s^{(r)}$, le lunghezze degli archi $\widehat{P^{(0)}P^{(r-1)}}$, $\widehat{P^{(0)}P^{(r)}}$, ad ogni punto dell'arco $\widehat{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ viene a corrispondere un punto, ed uno solo, del segmento $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$, e viceversa, se si prende, per corrispondente di un punto P, il numero s che misura la lunghezza di $\widehat{P^{(0)}P}$. Detti $\delta \equiv (s, s')$ e $\overline{PP'}$ un segmento qualsiasi non nullo di $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$ e la

(¹) La scrittura $P < Q$ significa che, su C, P precede Q.

corda corrispondente, preso ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < 1$, e fatto $F(\delta) \equiv \alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) - \varepsilon$, potremo costruire, per il n. 1, i due sistemi d'intervalli Δ e $\bar{\Delta}$, relativi alla $F(\delta)$ qui fissata e all'intervallo $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$. Gli intervalli di tali sistemi li contrassegneremo con l'indice r e scriveremo $\Delta^{(r)}, \bar{\Delta}^{(r)}$. Dal numero precedente risulta: 1°) $\sum_m \bar{\Delta}^{(r)}_m \leq 3 \sum_m \Delta^{(r)}_m$; 2°) se P e P' corrispondono agli estremi di uno stesso $\Delta^{(r)}$, è $\alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) \geq \varepsilon$; 3°) se (s, s') è un intervallo di $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$ avente un estremo esterno a tutti i $\bar{\Delta}^{(r)}$, è $\alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) < \varepsilon$. Si considerino ora i sistemi $\Delta^{(r)}, \bar{\Delta}^{(r)}$ relativi a tutti i valori di r, da 1 a p; e fra tutti gli intervalli $\Delta^{(r)}_m$ $(r = 1, 2, \ldots p\,;\ m = 1, 2, \ldots)$ se ne scelgano q ad arbitrio e si indichino con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$. Si inscriva in C la poligonale π' (la cui lunghezza indicheremo ancora con π') i cui vertici (che si presentano su π' nello stesso ordine in cui si trovano su C) siano dati da tutti quelli di π e dai punti di C che corrispondono agli estremi degli intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$. È, evidentemente, $\pi < \pi' \leq L$ e perciò $\pi' - \pi \leq L - \pi$. Sia π'_1 la somma delle lunghezze di quei lati di π', ciascuno dei quali corrisponde ad uno dei segmenti $\Delta_1, \ldots \Delta_q$ e fa un angolo compreso fra ε e $\frac{\pi}{2}$ (estremi inclusi) con $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$, essendo $P^{(r-1)}$ e $P^{(r)}$ i vertici consecutivi di π che comprendono fra loro gli estremi del lato considerato; π'_2, la somma delle lunghezze dei lati che corrispondono ai rimanenti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$; π'_3, la parte restante di π'. Il lato $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ della π è minore o uguale alla somma dei valori assoluti delle proiezioni ortogonali, fatte su $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ stesso, di quei lati di π', compresi fra $P^{(r-1)}$ e $P^{(r)}$, che formano con esso un angolo $\leq \frac{\pi}{2}$. Queste proiezioni sono poi sempre minori o uguali alla lunghezza dei lati che si proiettano e, nel caso che i lati proiettanti corrispondano a qualcuno degli intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$, anche minori o uguali ai lati stessi moltiplicati per $\cos\varepsilon$. Si ha così

$$\pi = \sum_{r=1}^{p} \overline{P^{(r-1)}P^{(r)}} < \pi'_1 \cos\varepsilon + \pi'_3 < \pi' - (\pi'_1 + \pi'_2)(1 - \cos\varepsilon),$$

donde $\pi'_1 + \pi'_2 \leq \frac{L - \pi}{1 - \cos\varepsilon} < 3\,\frac{L - \pi}{\varepsilon^2}$. Osserviamo qui che $\pi'_1 + \pi'_2$ dà la somma delle lunghezze di tutti quei lati di π' che corrispondono ai segmenti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$, e che le lunghezze degli archi di C sottesi da tali lati sono date precisamente da $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$. Di più, ogni termine della somma $\sum_1^q \Delta_t$ è maggiore o uguale al termine corrispondente di $\pi'_1 + \pi'_2$, e la differenza $\Sigma\Delta_t - (\pi'_1 + \pi'_2)$ non può superare $L - \pi'$ e quindi neppure $L - \pi$. Si ha dunque $\sum_1^q \Delta_t < L - \pi + (\pi'_1 + \pi'_2) < 4\,\frac{L-\pi}{\varepsilon^2}$. Questa disuguaglianza vale qualunque sia il gruppo $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$ scelto fra tutti gli $\Delta_m^{(r)}$; vale quindi anche l'altra $\sum_{r=1}^{p} \sum_m \Delta_m^{(r)} \leq 4\,\frac{L-\pi}{\varepsilon^2}$, ed è perciò $\sum_{r=1}^{p} \sum_m \bar{\Delta}_m^{(r)} \leq 12\,\frac{L-\pi}{\varepsilon^2}$. Se ne conclude, se i vertici di π sono scelti in modo da rendere $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}$, che è $\sum_{r=1}^{p} \sum_m \bar{\Delta}_m^{(r)} < \varepsilon$; e si può enunciare la proposizione: *fatta eccezione al più per i punti di* C *appartenenti all'infinità numerabile degli archi* $\bar{\Delta}_m^{(r)}$, *di misura totale* $< \varepsilon$, *per ogni altro punto* P *di* C *vale la seguente proprietà: qualunque sia* P', *appartenente allo stesso arco* $\widehat{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ *del quale fa parte* P, *si ha* $\alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) < \varepsilon$, *dove* ε *è un numero positivo* < 1, *arbitrariamente scelto, e* $P^{(0)} \equiv A$, $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(p)} \equiv B$ *sono i vertici di un poligono* π, *inscritto in* C, *tale che sia* $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}$.

3. Detti P, P', P'' tre punti qualsiasi di C, si ha allora

$$\underset{P' \to P,\, P'' \to P}{\text{Mass. Lim.}}\ \alpha(\overline{PP'}, \overline{PP''}) < 2\varepsilon,$$

eccettuati al più i punti P appartenenti agli intervalli $\bar{\Delta}_m^{(r)}$, ed eccettuati anche i $p+1$ vertici di π.

Si stabilisca che il poligono π sia quello che, fra i poligoni corrispondenti a divisioni di C in archi di ugual lunghezza e soddisfacenti alla $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}$, ha il minor numero di lati. Sostituendo, ad ε, via via $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^p}, \ldots$, e riunendo tutti gli intervalli $\bar{\Delta}_m^{(r)}$ corrispondenti ai diversi valori di p, si ha una successione di intervalli di lunghezza complessiva $< 2\varepsilon$; ed esclusi i punti di questi intervalli ed i punti dell'insieme numerabile formato dai vertici di tutti i poligoni π costruiti, esiste per tutti gli altri la tangente alla C. Siccome ε è arbitrario, il teorema del Lebesgue è dimostrato.

4. Consideriamo ora la successione $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ di curve continue, rettificabili, tendenti alla C, pure continua e rettificabile; e supponiamo che la lunghezza L_n della C_n tenda a quella L della C. Indicata con s la lunghezza dell'arco della C compreso fra il primo estremo A ed un punto qualunque P della curva stessa, sia $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $(0 \leq s \leq L)$, la rappresentazione analitica della C in funzione del parametro s. Analogamente, avremo la rappresentazione analitica $x = x_n(s_n)$,

$y = y_n(s_n)$, $z = z_n(s_n)$, $(0 \leq s_n \leq L_n)$ della C_n in funzione della lunghezza s_n del suo arco $\widehat{A_n P_n}$.

Se poniamo $s = \frac{L}{L_n} s_n$, abbiamo, per tutte le C_n e per la $C \equiv C_0$, la rappresentazione analitica simultanea

$$(1) \quad x = f_n(s)\,,\; y = g_n(s)\,,\; z = h_n(s)\,,\; (0 \leq s \leq L)\,,\; (n = 0\,,1\,,2\,,\ldots);$$

e, ad ogni segmento di $(0\,, L)$ di ampiezza δ, corrisponde su C_n un arco di lunghezza $\delta_n = \frac{L_n}{L}\delta$; e viceversa, ad ogni arco di C_n di ampiezza δ_n, corrisponde su $(0\,, L)$ un segmento di lunghezza $\delta = \frac{L}{L_n}\delta_n$. Data la convergenza della C_n verso la C, le funzioni $f_n\,, g_n\,, h_n$ convergono uniformemente verso $f_0\,, g_0\,, h_0$, rispettivamente; e il punto P_n di C_n, corrispondente al valore s del parametro, tende a quello P di C, relativo allo stesso s. Indichiamo con E l'insieme, di misura nulla, comprendente tutti i punti di $(0\,, L)$ per i quali manca la tangente ad almeno una delle curve C_n $(n = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$. Consideriamo poi il poligono π, inscritto in C, che è stato determinato nel n. 3, in corrispondenza ad ε, e diciamo $P^0 \equiv A\,, P^{(1)}, \ldots, P^{(p)} \equiv B$, i suoi vertici consecutivi. Ad essi corrispondono su C_n i punti $P_n^{(r)}$ $(r = 0\,, 1\,, \ldots p)$, vertici di un poligono π_n inscritto in C_n. Scegliamo $\bar{n}$ in modo che, per ogni $n > \bar{n}$, sia: 1°) $\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}\,, \overline{P_n^{(r-1)} P_n^{(r)}}) < \varepsilon$, $(r = 1\,, 2\,, \ldots p)$; 2°) $L_n - \pi_n < \frac{\varepsilon^3}{12}$ $\left(\text{ricordiamo che è } L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}\right)$; 3°) $|L_n - L| < \frac{L}{2}$. Fissato un $n > \bar{n}$, si considerino gli intervalli $\bar{\Delta}_m^{(r)}$, della proposizione del n. 2, relativi alla C, ed anche quelli relativi alla C_n; a questi ultimi corrispondono su $(0\,, L)$ degli intervalli di lunghezza complessiva $< \frac{L}{L_n}\varepsilon < 2\varepsilon$, i quali si possono riunire con quelli relativi a C in una unica successione S_n (di misura $< 3\varepsilon$). Detto s un punto esterno a tutti gli intervalli di S_n e all'insieme E, le tangenti t e t_n, nei punti P e P_n delle C e C_n, ad esso corrispondenti, formeranno fra loro (per la proposizione del n. 2 e per la $\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}\,, \overline{P_n^{(r-1)} P_n^{(r)}}) < \varepsilon$) un angolo $< 3\varepsilon$. Siccome ε è arbitrario, e $m(E) = 0$, $m(S_n) < 3\varepsilon$, e poichè ciò vale per ogni $n > \bar{n}$, è dimostrato che *le tangenti t_n tendono in misura alle tangenti t*.

5. Viceversa, si ha facilmente che, *supposta sempre la C_n tendente alla C, se le lunghezze della C_n e della C sono finite e se la tangente t_n alla C_n converge in misura a quella t della C — essendo t_n e t corrispondenti secondo la rappresentazione* (1) — *allora la lunghezza della C_n tende a quella della C*.

6. Sia $F(x, y, z, x', y', z')$ una funzione finita e continua per tutti i valori di x, y, z, di un certo campo Γ, nel quale siano contenute tutte le C_n, e per tutte le terne x', y', z' soddisfacenti alla $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. La F sia, inoltre, positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle x', y', z': soddisfi cioè, per ogni $k > 0$, all'uguaglianza

$$F(x, y, z, kx', ky', kz') = kF(x, y, z, x', y', z').$$

Si ha immediatamente

$$\int_{C_n} F(x, y, z, x', y', z')\, ds_n = \int_0^L F(f_n(s), g_n(s), h_n(s), f'_n(s), g'_n(s), h'_n(s))\, ds.$$

Dal n. 4 risulta che $f'_n(s), g'_n(s), h'_n(s)$ tendono in misura a $f'_0(s)$, $g'_0(s), h'_0(s)$, e poichè $F(f_n(s), g_n(s), \ldots)$ resta, qualunque sia n, inferiore in modulo ad un numero fisso, si ha, per un teorema sull'integrazione per serie, dovuto al Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} F\, ds_n = \int_C F\, ds.$$

7. Si consideri la successione di funzioni $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ dell'enunciato $b)$ dell'introduzione. Le $u_n(x)$ risultano (almeno da un certo punto in poi; e senza restrizione possiamo suppore che ciò sia per ogni n) a variazione limitata e quindi prive di punti di discontinuità di 2ª specie. Indichiamo con C_n la curva ottenuta aggiungendo ai punti di $y = u_n(x)$ i segmenti, paralleli all'asse delle y, aventi per estremi i punti $(x, u_n(x-0))$, $(x, u_n(x))$ e $(x, u_n(x))$, $(x, u_n(x+0))$. Questa C_n risulta continua e rettificabile e di lunghezza, L_n, uguale a quella della $y = u_n(x)$. Lo stesso dicasi per la curva $C \equiv C_0$ corrispondente a $y = u(x) \equiv u_0(x)$. Per le ipotesi fatte, nell'enunciato ricordato, e per un noto teorema di Hilbert sull'esistenza di una curva limite per le successioni di curve inferiori in lunghezza ad un numero fisso, le C_n convergono alle C, e le tangenti t_n di C_n convergono perciò in misura a quelle t di C. Riprendiamo la rappresentazione (1) delle curve C_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ e indichiamo con E_ε un insieme di punti di $(0, L)$, di misura $> L - \varepsilon$, sul quale la tangente alla C esiste e varia con continuità. Sia n_p il primo intero positivo $> n_{p-1}$ [1] per il quale è $L_{n_p} < 2L$ e $m(E_{n_p}) > m(E_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2^p}$, dove E_{n_p} indica il componente di E_ε nei cui punti la tangenfe t_{n_p} alla C_{n_p} esiste e forma, con la corrispondente tangente t alla C, un angolo $< \frac{\varepsilon}{2^p}$. Ai punti di E_ε corrispondono sulla C dei punti che formano un insieme di misura (contata sulla curva stessa) uguale

[1] Per $p = 1$ questa condizione si ometterà.

a $m(E_\varepsilon)$ e che si proiettano ortogonalmente su (a, b) in un insieme I_ε di misura $> (b - a) - \varepsilon$ (perchè il complementare dell'insieme detto sulla curva ha misura $< \varepsilon$ e si proietta in un insieme di misura $< \varepsilon$). Parimenti ai punti di E_{np} corrispondono sulla C_{np} dei punti che, proiettati ortogonalmente su (a, b), dànno un insieme I_{np} di misura $> (b - a) - 4\varepsilon$ (perchè il complementare dell'insieme detto sulla curva ha misura $< \frac{L_n}{L}\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^p}\right) < 4\varepsilon$ e si proietta su (a, b) in un insieme di misura $< 4\varepsilon$). Sia I'_ε l'insieme *limite-completo* della successione di insiemi $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots I_{n_p}, \ldots$ la cui misura, secondo un teorema dovuto al Borel, è $> (b - a) - 4\varepsilon$, e I''_ε la parte comune a questo I'_ε, a I_ε, all'insieme dei punti nei quali esistono finite tutte le $u'_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e a quello ove la successione delle $u'_n(x)$ converge. È $m(I''_\varepsilon) > (b - a) - 5\varepsilon$. Consideriamo un punto x di I''_ε. Questo x appartiene ad un'infinità di insiemi $I_{np} : I_{n'_1}, I_{n'_2}, \ldots I_{n'_p}, \ldots$.

Indichiamo con $P^{(n'_p)}_{n'_p}$ il punto $(x, u_{n'_p}(x))$ della $C_{n'_p}$, con P quello $(x, u(x))$ della C; con $P^{(n'_p)}$ quello della C che corrisponde a $P^{(n'_p)}_{n'_p}$. Siccome su E_ε la tangente alla C varia con continuità, possiamo dire che, per tutti i punti della C abbastanza vicini a P, e corrispendenti a punti di E_ε, la u' esiste finita, e differisce da $u'(x)$ per quanto poco si vuole; preso dunque $\eta > 0$, è possibile di determinare un σ in modo che sia $|u'(x) - u'(x_1)| < \eta$ se x_1 appartiene a I_ε ed è $|x - x_1| < \sigma$. Per la convergenza della $C_{n'_p}$ alla C, si può determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $n'_p > \bar{n}$ la distanza fra $P^{(n'_p)}$ e $P^{(n'_p)}_{n'_p}$ sia $< \sigma$: e poichè $P^{(n'_p)}_{n'_p}$ al crescere indefinito di n'_p tende a P, si ha che, per ogni n'_p maggiore di un certo $\bar{\bar{n}} > \bar{n}$, la distanza fra P e $P^{(n'_p)}$ è $< \sigma$. Pertanto, detta $x_{n'_p}$ l'ascissa di $P^{(n'_p)}$, è $|x - x_{n'_p}| < \sigma$ e perciò $|u'(x) - u'(x_{n'_p})| < \eta$. D'altra parte, poichè x appartiene a $I_{n'_p}$, la tangente $t^{(n'_p)}_{n'_p}$ alla $C_{n'_p}$, nel punto $P^{(n'_p)}_{n'_p}$ fa con quella $t^{(n'_p)}$ alla C in $P^{(n'_p)}$ un angolo $< \frac{\varepsilon}{2^p}$: dunque la differenza $u'(x_{n'_p}) - u'_{n'_p}(x)$ tende a zero al crescere di n'_p e si ha, per ogni $n'_p >$ di un certo N, $|u'(x) - u'_{n'_p}(x)| < 2\eta$. Poichè in x la $u'_n(x)$ converge per $n \to \infty$, è $\lim_{n \to \infty} u'_n(x) = u'(x)$. Avendo l' insieme I''_ε una misura $> (b - a) - 5\varepsilon$, dove ε è arbitrario, l'uguaglianza precedente resta dimostrata quasi dappertutto.

Osservazione. — Nell'enunciato *b)* si può supporre che la $n_1(x)$, $n_2(x), \ldots, n_n(x), \ldots$ *converga solo in misura verso la* $n(x)$.

8. Supponiamo le $u_n(x)$ monotòne e, per es., non decrescenti. Allora, eccettuato un insieme E, di misura nulla, le $u'_n(x)$, $u'(x)$ esistono finite e sono ≥ 0; e siccome, supponendo $u(x) = \Sigma u_n(x)$, è

$$u(x+h) - u(x) = \sum \{u_n(x+h) - u_n(x)\} > \sum_1^r \{u_n(x+h) - u_n(x)\},$$

nel complementare di E è $u' \geq \sum_1^r u'_n(x)$, onde $\sum u'_n(x)$ converge quasi dappertutto. È poi

$$\sqrt{h^2 + \{u(x+h) - u(x)\}^2} > \sqrt{h^2 + \left\{\sum_1^r u_n(x+h) - \sum_1^r u_n(x)\right\}^2},$$

e quindi, ad ogni poligonale inscritta in $y = \sum_1^r u_n(x)$, ne corrisponde una di maggior lunghezza inscritta in $y = u(x)$. La lunghezza di $y = \sum_1^r u_n(x)$ tende dunque a quella di $y = u(x)$. Dal teorema del numero precedente scende perciò, come corollario, il teorema di Fubini ricordato nell'introduzione.

Storia della meccanica. — *Sulle origini della scienza dell'elasticità.* Nota del prof. G. Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Una delle idee più comuni e fondamentali nella meccanica moderna [1] è quella di *elasticità*. Questa idea astratta ha parole che la rappresentano in tutte le lingue viventi moderne [2]; fa anzi parte della lingua comune, tanto che anche i bambini l'adoperano con perfetta familiarità.

[1] L'insufficienza della storia della meccanica, specialmente per quanto riguarda l'origine e l'evoluzione dei diversi concetti di questa scienza, è stata opportunamente rilevata in: Vito Volterra, *Lectures delivered at the Clark University* (*Trois leçons sur quelques progrès récents de la physique mathématique*), Worcester, Mass., 1909, pag. 28.

[2] In italiano francese ed inglese si adoperano la parola *elasticità* ed i suoi derivati, seguendo l'uso del primo inventore. I Tedeschi hanno introdotto le parole *Federkraft*, *Spannkraft*, *Schnellkraft*, e simili. La parola elasticità, bandita dal grande dizionario dei Grimm, ricompare però nelle necessarie spiegazioni di queste parole: secondo lo stesso dizionario, queste son tutte parole recenti, adoperate soltanto da Kant e da Goethe.

Nelle lingue orientali (giapponese, cinese, arabo) mancavano nella lingua classica parole corrispondenti alla nuova idea; nei dizionarî moderni del secolo XIX, in queste lingue, sono state a questo scopo introdotte nuove parole o circumlocuzioni imitate dalle lingue europee.