ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 marzo 1916.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui sistemi ortogonali di Guichard-Darboux negli spazî di curvatura costante.* Nota I del Socio L. Bianchi.

1. Nell'ultimo capitolo delle *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes* (2ème édition, Paris, Gauthier-Villars, 1910), il Darboux, generalizzando ricerche anteriori di Guichard, ha studiato una classe di sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) dell'ordinario spazio, caratterizzata dalla proprietà che nella corrispondente forma del ds^2,

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2,$$

sussiste fra i coefficienti la relazione quadratica

$$H_1^2 + H_3^2 + H_3^2 = \text{cost}.$$

Nella Nota presente, ed in una seconda successiva, questa teoria viene estesa in due sensi, e cioè supponendo: 1°) che lo spazio abbia un numero qualunque n di dimensioni; 2°) che la curvatura dello spazio, invece di esser nulla (spazio euclideo), sia una costante qualunque. Esistono in effetto, come si vedrà, nello spazio S_n a n dimensioni e di curvatura riemanniana costante K, infiniti tali sistemi n^{pli} ortogonali, che diremo *sistemi di Guichard-Darboux*; la loro ricerca dipende dall'integrazione di un sistema di equazioni simultanee a derivate parziali che ha la forma lineare canonica del Bourlet, il sistema (B) del seguente numero.

Se si considera che, nel primo e più semplice caso $n = 2$, il problema consiste nel ridurre il ds^2 di una superficie a curvatura costante alla nota forma

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2\,,$$

ossia nel problema di *rivestire* una tale superficie con reti di Tchebychef (ved. le mie *Lezioni*, vol. II, § 379), possiamo riguardare le attuali ricerche come l'estensione agli spazî a un numero qualunque di dimensioni dell'anzidetta teoria, che include la teoria delle ordinarie superficie pseudosferiche e delle loro *trasformazioni*.

Dopo ciò, è ben naturale domandarsi se esistono trasformazioni analoghe pel caso generale dei sistemi di Guichard-Darboux negli spazî di curvatura costante. Risponderemo affermativamente alla domanda costruendo per lo spazio pseudosferico (a curvatura costante negativa) una prima trasformazione dei sistemi ortogonali di Guichard-Darboux, che è l'analoga della trasformazione complementare, alla quale in effetto si riduce nel caso $n = 2$.

2. Lo spazio S_n di curvatura riemanniana costante K sia riferito ad un sistema n^{plo} ortogonale $(u_1, u_2, \ldots u_n)$, ed abbiasi, pel corrispondente ds^2,

$$ds^2 = \sum_\lambda H_\lambda^2\, du_\lambda^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + \cdots + H_n^2\, du_n^2\,.$$

Il sistema differenziale *caratteristico* a cui debbono soddisfare le funzioni $H_1, H_2, \ldots H_n$ di $u_1, u_2, \ldots u_n$, e le relative rotazioni β_{ik}, si scrive (ved. la mia Nota precedente, in questi Rendiconti, seduta 6 febbraio 1916):

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, H_k \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \qquad\qquad (i \neq k \neq l) \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum\limits_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} + K\, H_i H_k = 0 \text{ [1]}. \end{cases}$$

Vogliamo esaminare se esistono di tali sistemi n^{pli} ortogonali per i quali sia soddisfatta la relazione quadratica

$$(1)\qquad \sum_\lambda H_\lambda^2 = H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = \text{cost.}$$

[1] Si rammenta che le segnature come

$$\sum_\lambda^{(i)}\,,\ \sum_\lambda^{(i,k)} \ldots\ldots$$

stanno ad indicare che nella corrispondente somma l'indice variabile λ deve percorrere tutti i valori $1, 2, 3, \ldots n$, *eccettuato il valore* i nel primo caso, o i valori i, k nel secondo, ecc.

Derivando questa rapporto ad u_i, abbiamo

$$\mathrm{H}_i \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \mathrm{H}_\lambda \frac{\partial \mathrm{H}_\lambda}{\partial u_i} = -\mathrm{H}_i \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} \mathrm{H}_\lambda ,$$

e quindi

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} \mathrm{H}_\lambda .$$

Paragonando questa con la (A_1)

$$\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \mathrm{H}_k ,$$

e costruendo la relativa condizione d' integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ki} \mathrm{H}_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ik} \mathrm{H}_k) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{i\lambda} \mathrm{H}_\lambda) = 0 ,$$

si ottiene, per le (A) e per la (2),

$$\mathrm{H}_k \left\{ \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} \right\} +$$
$$+ \beta_{ki} \beta_{ik} \mathrm{H}_i - \beta_{ik} \sum_{\lambda}^{(k)} \beta_{k\lambda} \mathrm{H}_\lambda + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{ik} \beta_{k\lambda} \mathrm{H}_\lambda = 0 .$$

Gli ultimi tre termini si elidono e resta

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0 ;$$

e, aggregando questa e la (2) alle (A), si forma il seguente sistema:

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} \mathrm{H}_k \quad , \quad \dfrac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = -\sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} \mathrm{H}_\lambda \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \qquad\qquad (i \neq k \neq l) \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum\limits_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \mathrm{K} \mathrm{H}_i \mathrm{H}_k = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum\limits_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0 . \end{array} \right.$$

Viceversa, se le H_i, β_{ik} soddisfano a questo sistema, e, per ciò, anche alle (A), ne risulta definito un sistema n^{plo} ortogonale di Guichard-Darboux, perchè la funzione $\sum_\lambda \mathrm{H}_\lambda^2$, avendo nulle per le (B) della prima linea tutte le derivate, è una costante, ed è quindi soddisfatta la (1).

3. Il nostro problema consiste ora nell'esaminare se le (B) ammettono soluzioni, ed in quale arbitrarietà.

Per questo immaginiamo di risolvere le (B) delle due ultime linee rispetto a quelle delle due derivate il cui indice della variabile di derivazione è minore; così il sistema avrà la forma *lineare canonica* considerata dal Bourlet nella sua Memoria fondamentale [1]. Per ciascuna delle funzioni incognite H_i, essendo date in (B) *tutte* le relative derivate, ogni variabile è principale; invece, per ciascuna β_{ik} si ha una ed una sola variabile *parametrica*, cioè la u_i o la u_k, secondo che $i > k$ ovvero $i < k$, e le altre $n-1$ variabili sono principali.

Proveremo che il sistema (B) è *completamente integrabile*, dimostrando che dall'eguagliare le due espressioni di ogni derivata seconda (mista) principale si ottengono relazioni identiche in virtù delle (B) stesse (Bourlet, loc. cit.).

La verifica è immediata per due equazioni scelte nella prima o seconda linea del quadro (B), e basterà quindi confrontare le equazioni della seconda linea con quelle della terza e della quarta. Resta dunque da provare che, se si derivano rapporto ad u_l ($l \neq i, k$) le equazioni nelle due ultime linee, si ottengono relazioni identiche per le (B) stesse, ossia che si annullano le due espressioni seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} \Omega &= \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il}\beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{kl}\beta_{li}) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}) + \mathrm{K}\frac{\partial}{\partial u_l}(\mathrm{H}_i\mathrm{H}_k) \\ \Omega' &= \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{il}\beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{kl}\beta_{li}) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}) . \end{aligned}\right.$$

Ora se nei secondi membri nella somma $\sum\limits_{\lambda}^{(i,k)}$ mettiamo da sè il termine corrispondente a $\lambda = l$, e, ponendo mente alle (B), raccogliamo i termini, si trova

$$\begin{aligned} \Omega = \beta_{lk}\left\{\frac{\partial\beta_{il}}{\partial u_i} + \frac{\partial\beta_{li}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,l)} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l} + \mathrm{K}\,\mathrm{H}_i\mathrm{H}_l\right\} + \\ + \beta_{li}\left\{\frac{\partial\beta_{kl}}{\partial u_k} + \frac{\partial\beta_{lk}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(k,l)} \beta_{\lambda k}\beta_{\lambda l} + \mathrm{K}\,\mathrm{H}_k\mathrm{H}_l\right\} \end{aligned}$$

$$\Omega' = \beta_{kl}\left\{\frac{\partial\beta_{il}}{\partial u_l} + \frac{\partial\beta_{li}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\beta_{l\lambda}\right\} + \beta_{il}\left\{\frac{\partial\beta_{kl}}{\partial u_l} + \frac{\partial\beta_{lk}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k,l)} \beta_{kl}\beta_{l\lambda}\right\} .$$

Ma, in virtù delle (B), le espressioni che moltiplicano nella prima β_{lk}, β_{li}, e nella seconda β_{kl}, β_{il}, sono nulle, e per ciò $\Omega = \Omega' = 0$, c. d. d.

[1] Ved. Bourlet, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Annales de l'École Normale Supérieure, tome VIII, 3ème série, Suppl.).

Le (B) formano dunque un sistema completamente integrabile, e la sua soluzione generale (H_i, β_{ik}) dipende da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie, potendosi prescrivere ad arbitrio, per ciascuna delle β_{ik}, la funzione della variabile parametrica a cui si riduce la β_{ik}, quando le $n-1$ variabili principali prendono valori iniziali prefissati. Concludiamo adunque:

Nello spazio S_n *a curvatura riemanniana costante* K *esistono infiniti sistemi ortogonali di Guichard-Darboux, e dipendono da* $n(n-1)$ *funzioni arbitrarie (di una variabile ciascuna).*

4. I teoremi generali sopra invocati ci assicurano dell'esistenza dei sistemi di Guichard-Darboux, ma nulla ci apprendono sull'integrazione effettiva del sistema (B) da cui la ricerca dipende. Ora vogliamo dimostrare che anche in questa teoria, come accade in tante altre di geometria infinitesimale, si possono costruire dei metodi *d'integrazione successiva* che permettono, nota una soluzione iniziale delle (B), di dedurne infinite nuove integrando equazioni differenziali ordinarie, od anche, in certe circostanze, con sole quadrature.

Noi supporremo ora lo spazio S_n *pseudosferico*, cioè a curvatura costante negativa, e costruiremo, pei sistemi di Guichard-Darboux, in questo spazio, una classe di *trasformazioni* che si diranno *complementari*, perchè corrispondono esattamente alla trasformazione complementare delle ordinarie superficie pseudosferiche (cfr. n. 1).

Partiamo da una soluzione nota (H_i, β_{ik}) delle (B), per la quale si abbia

$$H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = a^2 \qquad (a \text{ costante}). \tag{3}$$

e dimostriamo che ne esistono infinite altre (precisamente ∞^{n-1}) (H_i', β_{ik}') legate alla primitiva dalle relazioni

$$\beta_{ik}' = \beta_{ki} + cH_i H_k' \tag{4}$$

$$H_1'^2 + H_2'^2 + \cdots + H_n'^2 = a^2, \tag{3'}$$

dove c è una costante, legata alla a ed alla curvatura K dalla relazione

$$K = -c^2 a^2 . \tag{5}$$

Se scriviamo intanto che le H_i', β_{ik}' debbono soddisfare alle (B) della prima linea, e teniamo conto delle (4) e (3'), troviamo per le H_i' il sistema ai differenziali totali

$$\text{(C)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_i'}{\partial u_k} &= (\beta_{ik} + cH_k H_i') H_k' \\ \frac{\partial H_i'}{\partial u_i} &= -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda' + cH_i H_i'^2 - ca^2 H_i , \end{aligned} \right.$$

a cui dobbiamo aggregare, come equazione in termini finiti, l'altra

$$(\mathrm{C}') \qquad \sum_\lambda \mathrm{H}'^2_\lambda = a^2 .$$

Le equazioni (C), (C') formano, per le funzioni incognite H'_i, un *sistema misto* ai differenziali totali, di cui cominciamo a riscontrare la illimitata integrabilità.

5. La (C'), derivata rapporto ad una qualunque u_l, dà un'equazione identica per le (C), e dobbiamo solo esaminare le condizioni d'integrabilità delle (C), cioè le due equazioni

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial u_k}\right) - \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial u_l}\right) = 0$$

$$\Theta' = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial u_k}\right) - \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial u_k}\right) = 0 .$$

Ora si ha

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{ik}\,\mathrm{H}'_k) - \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{il}\,\mathrm{H}'_l) + c\,\frac{\partial}{\partial u_l}(\mathrm{H}_k\,\mathrm{H}'_i\,\mathrm{H}'_k) - c\,\frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_l\,\mathrm{H}'_i\,\mathrm{H}'_l),$$

ed eseguendo, colle (C) e colle (B), si riscontra che, in effetto, $\Theta = 0$.

In secondo luogo troviamo

$$\Theta' = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\,\mathrm{H}'_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki}\,\mathrm{H}'_k) + c\,\frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_k\,\mathrm{H}'_i\,\mathrm{H}'_k) +$$

$$+ \sum_\lambda^{(i,k)} (\beta_{\lambda i}\,\mathrm{H}'_\lambda) - c\,\frac{\partial}{\partial u_k}(\mathrm{H}_i\,\mathrm{H}'^2_i) + ca^2\,\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k},$$

ed eseguendo, colle (C) e (B), risulta, dopo alcune riduzioni,

$$\Theta' = -\,\mathrm{H}_i\,\mathrm{H}_k\,\mathrm{H}'_k(\mathrm{K} + c^2 a^2);$$

questa espressione è nulla per la supposta relazione (5). Concludiamo: *Il sistema misto ai differenziali totali* (C), (C') *per le funzioni incognite* H_i *è completamente integrabile, e la sua soluzione generale dipende quindi da* $n - 1$ *costanti arbitrarie* [1].

Scegliamo allora una qualunque di queste soluzioni (H'_i) e calcoliamo le β'_{ik} dalle formule (4). Se dimostriamo che queste funzioni $(\mathrm{H}'_i, \beta'_{ik})$ soddisfano nuovamente alle (B), ne risulterà definito un nuovo sistema di Guichard-Darboux, che diremo complementare del primitivo. La forma simmetrica della (4) proverà, poi, che la relazione fra due sistemi complementari è reciproca.

[1] Per queste si possono prendere i valori iniziali delle H'_i legati dalla (C').

6. Per dimostrare le asserzioni superiori, cominciamo dall'osservare che le H'_i soddisfano certamente alle equazioni della prima linea in (B)

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ki} H'_k \quad , \quad \frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \beta'_{i\lambda} H'_\lambda \, ,$$

come segue dal modo stesso tenuto per formare le (C).

Proveremo ora successivamente che sussistono anche le equazioni delle altre tre linee in (B):

$$\alpha) \qquad \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_l} = \beta'_{il} \beta'_{lk}$$

$$\beta) \qquad \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta'_{\lambda i} \beta'_{\lambda k} + K H'_i H'_k = 0$$

$$\gamma) \qquad \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta'_{i\lambda} \beta'_{k\lambda} = 0 \, .$$

α). Queste equazioni si scrivono

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_l} + c \frac{\partial}{\partial u_l} (H_i H'_k) = (\beta_{li} + c H_i H'_l)(\beta_{kl} + c H_k H'_l) \, ,$$

e, eseguendo le derivazioni colle (B) e colle (C), si convertono subito in identità.

β) Le equazioni di questo gruppo diventano, per le (4),

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + c \frac{\partial}{\partial u_i} (H_i H'_k) + c \frac{\partial}{\partial u_k} (H_k H'_i) +$$
$$+ \sum_{\lambda}^{(i,k)} (\beta_{i\lambda} + c H_\lambda H'_i)(\beta_{k\lambda} + c H_\lambda H'_k) + K H'_i H'_k = 0 \, .$$

Eseguendo le derivazioni e riducendo, resta

$$H'_i H'_k (K + c^2 \sum_\lambda H^2_\lambda) = 0$$

che in effetto sussiste a causa della (3) e della (5).

γ) Da ultimo, per le equazioni di questo gruppo abbiamo

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c \frac{\partial}{\partial u_k} (H_i H'_l) + c \frac{\partial}{\partial u_i} (H_k H'_i) +$$
$$+ \sum_{\lambda}^{(i,k)} (\beta_{\lambda i} + c H_i H'_\lambda)(\beta_{\lambda k} + c H_k H'_\lambda) = 0 \, ;$$

queste, col sussidio delle (B), (C) e riducendo, diventano

$$H_i H_k (c^2 \sum_\lambda H'^2_\lambda - K - 2c^2 a^2) = 0\,,$$

e per la (5) e per la (C′) sono pure identicamente soddisfatte.

Concludiamo adunque: *Ogni sistema ortogonale di Guichard-Darboux, nello spazio pseudosferico* S_n *a n dimensioni, ammette* ∞^{n-1} *sistemi complementari, la cui ricerca dipende dall'integrazione del sistema misto* (C), (C′) *ai differenziali totali.*

7. Esaminando più da vicino il problema di integrazione di questo sistema (C), (C′), da cui dipende, come si è visto, la ricerca dei sistemi complementari, possiamo dimostrare che esso equivale alla ricerca delle *linee geodetiche* dello spazio: risultato, questo, che, nel caso più semplice $n = 2$, era ben noto.

Per dimostrare l'asserto, supponiamo dapprima di conoscere un sistema H'_i di soluzioni delle (C) e delle (C′), e partiamo dall'osservazione, d'immediata verifica, che l'espressione

$$\sum_\lambda H_\lambda H'_\lambda\, du_\lambda$$

è in tal caso un differenziale esatto. Con una quadratura possiamo dunque determinare una funzione Φ delle u_i che soddisfi alle equazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = -\, c H_i H'_i \Phi \qquad (i = 1, 2, \ldots n)\,, \tag{6}$$

e, per ciò, anche all'altra, che risulta dalle (3′), (5),

$$\Delta_1 \Phi = \sum_i \frac{1}{H_i^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)^2 = -\, K \Phi^2\,, \tag{7}$$

essendo $\Delta_1 \Phi$ il parametro differenziale primo. Ma di più dimostriamo che questa funzione Φ soddisfa anche alle equazioni del secondo ordine di Weingarten (ved. *Lezioni*, vol. I, § 185)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\lambda} + K a_{ik} \Phi = 0\,,$$

per tutte le coppie (i, k). Nel caso nostro, avendosi

$$a_{ii} = H_i^2 \quad a_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k\,,$$

le equazioni di Weingarten si scrivono

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_k} &= \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\lambda} \qquad (i \neq k) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i^2} &= \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\,i \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\lambda} - K H_i^2 \Phi\,, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

e si verifica facilmente che sono conseguenze delle (6), tenendo conto che (se i, k, l denotano indici *diversi*) i simboli di Christoffel hanno qui i valori

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = 0 \;, \quad \begin{Bmatrix} i\,k \\ i \end{Bmatrix} = \frac{H_k}{H_i}\beta_{ki} \;, \quad \begin{Bmatrix} i\,i \\ k \end{Bmatrix} = -\frac{H_i}{H_k}\beta_{ki} \;, \quad \begin{Bmatrix} i\,i \\ i \end{Bmatrix} = -\sum_\lambda^{(i)} \frac{H_\lambda}{H_i}\beta_{i\lambda} \,.$$

La funzione Φ, calcolata con una quadratura dalle (6), soddisfa dunque alle equazioni (8) di Weingarten e inoltre alla (7). Per quanto è dimostrato nelle *Lezioni* (loc. cit.), risulta: *Le ipersuperficie* $\Phi = cost$ *nello spazio pseudosferico sono orisfere concentriche, ossia le loro traiettorie ortogonali sono geodetiche concorrenti in un punto all'infinito* (*parallele nel senso non-euclideo*).

Ora inversamente, se nello spazio pseudosferico S_n è noto un sistema ortogonale di Guichard-Darboux, definito da

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2 \,,$$

con

$$H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = a^2 \,,$$

ed è nota una soluzione Φ delle equazioni (8) di Weingarten e della (7), le formole

$$H_i' = -\frac{1}{cH_i}\frac{\partial \log \Phi}{\partial u_i}$$

dànno un sistema di soluzioni delle (C), (C′) e definiscono per ciò (intrinsecamente) un sistema di Guichard-Darboux complementare del primitivo.

Quando le geodetiche dello spazio S_n sono note, si hanno subito in termini finiti tutte le ∞^{n-1} soluzioni Φ delle (7), (8), e, per ciò, anche tutti i sistemi complementari del sistema dato risultano intrinsecamente definiti.

Se prendiamo il caso dello spazio pseudosferico a 3 dimensioni, è facile vedere ulteriormente che (supposte note le linee geodetiche) i sistemi complementari di un dato sistema ortogonale di Guichard-Darboux si trovano in termini finiti *con quadrature*, e lo stesso vale naturalmente se si applica di nuovo la trasformazione complementare ai sistemi derivati, e così via.

8. Se consideriamo in particolare i sistemi di Guichard-Darboux nello spazio S_n *euclideo*, dovremo fare $K = 0$; e le equazioni (B), per le β_{ik}, diventano

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0 \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\,\beta_{k\lambda} = 0 \,. \end{aligned} \right.$$

Questo sistema, completamente integrabile, ammette soluzioni β_{ik} dipendenti da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie (n. 3), ed ogni soluzione (β_{ik}) dà le rotazioni comuni ad infiniti sistemi n^{pli} ortogonali paralleli.

Fra questi sistemi, oltre la classe già caratterizzata dalla relazione

$$H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = \text{cost}\,,$$

ve ne ha una più ampia in cui questa relazione è sostituita dall'altra

$$\text{(I)} \qquad H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = a\varrho^2 + b\,,$$

dove a, b sono costanti arbitrarie, e ϱ^2 è il quadrato della distanza di un punto generico $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ da un punto fisso nello spazio (origine).

Per trovare i sistemi corrispondenti alla (I), si ricordi che, indicando con $W_1, W_2, \ldots W_n$ le distanze (algebriche) dell'origine dalle facce dell'n^{edro} principale, sussistono le relazioni

$$\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial u_i} = H_i W_i \quad , \quad \frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k)\,.$$

Derivando la (I), si ottengono quindi le nuove equazioni

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = a W_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda\,,$$

sicchè pei sistemi n^{pli} ortogonali corrispondenti alla (I) dovranno sussistere le equazioni

$$\text{(10)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = a W_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda \\ &\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k\,. \end{aligned} \right.$$

Queste formano, per la (9), un sistema complamente integrabile, ed ogni sua soluzione (H_i, W_i) fornisce un sistema n^{plo} ortogonale dell'S_n euclideo pel quale sussiste la (I).

9. Osserviamo, ora, che i sistemi ortogonali di Guichard-Darboux nello spazio a curvatura costante possono trasportarsi, colle note rappresentazioni conformi, nell'S_n euclideo, e si ottengono allora sistemi ortogonali in questo spazio, che vengono a soddisfare relazioni analoghe alla (I).

Prendiamo dapprima il caso dello spazio pseudosferico e, posto per semplicità $K = -1$, facciamone la nota rappresentazione nel semispazio euclideo (*Lezioni*, vol. I, § 187), dove il ds^2 avrà la forma

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}\,,$$

le $x_1, x_2, \ldots x_n$ essendo nello spazio euclideo coordinate cartesiane ortogonali. Un sistema n^{plo} ortogonale di Guichard-Darboux nello spazio curvo con

$$\mathrm{H}_1^2 + \mathrm{H}_2^2 + \cdots + \mathrm{H}_n^2 = a^2 ,$$

darà nello spazio euclideo un corrispondente sistema con

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = x_n^2 (\mathrm{H}_1^2 du_1^2 + \mathrm{H}_2^2 du_2^2 + \cdots + \mathrm{H}_n^2 du_n^2) ;$$

e se poniamo

$$h_1 = x_n \mathrm{H}_1 , \; h_2 = x_n \mathrm{H}_2 , \ldots h_n = x_n \mathrm{H}_n ,$$

avremo quindi

(II) $$h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2 = a^2 x_n^2 ,$$

relazione che è analoga alla (I). Viceversa, ogni sistema n^{plo} ortogonale nello spazio euclideo, che soddisfi alla (II), sarà l'immagine di un sistema di Guichard-Darboux dello spazio curvo. Le trasformazioni complementari di questi sistemi, che sopra abbiamo ottenuto, acquistano così un significato anche nello spazio euclideo, come trasformazioni dei sistemi ortogonali soddisfacenti alla (II).

Similmente, se per K qualunque prendiamo il ds^2 sotto la forma di Riemann

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{\left\{ 1 + \frac{\mathrm{K}}{4} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \right\}^2} ,$$

dai sistemi di Guichard-Darboux dedurremo, per rappresentazione conforme, sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio euclideo ove la (II) sarà sostituita dall'altra

(II*) $$h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2 = a^2 \left\{ 1 + \frac{\mathrm{K}}{4} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \right\}^2 .$$

10. Un altro modo di arrivare ai sistemi ortogonali dello spazio S_n euclideo che soddisfano alla equazione (II), anzi ad una più generale, si ottiene partendo dalle osservazioni seguenti, che vengono suggerite dalla forma del sistema (B):

Se poniamo

$$\bar{\beta}_{ik} = \beta_{ki} ,$$

vediamo dalle (B) che le $\bar{\beta}_{ik}$ soddisfano alle equazioni caratteristiche per le rotazioni di un sistema n^{plo} ortogonale nell'S_n euclideo

(11) $$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_l} = \bar{\beta}_{il} \bar{\beta}_{lk} \\ & \frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \bar{\beta}_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \bar{\beta}_{\lambda i} \bar{\beta}_{\lambda k} = 0 . \end{aligned} \right.$$

Le equazioni della prima linea in (B), che scriviamo

$$\frac{\partial Z_i}{\partial u_k} = \bar{\beta}_{ik} Z_k \,, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \bar{\beta}_{\lambda i} Z_i \,,$$

sono quelle che caratterizzano i coseni $(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$ degli angoli che una direzione *fissa nello spazio* forma cogli spigoli dell' n^{edro} principali, mentre le equazioni della penultima linea in (B) si scrivono

$$\frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \bar{\beta}_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \bar{\beta}_{i\lambda} \bar{\beta}_{k\lambda} + K Z_i Z_k = 0 \,.$$

Ora, se prendiamo uno qualunque degli infiniti sistemi n^{pli} ortogonali paralleli, colle rotazioni $\bar{\beta}_{ik}$ che soddisfano alle (11), ed è

$$ds^2 = \sum_{\lambda} H_\lambda^2 \, du_\lambda^2$$

la corrispondente forma del ds^2, le H_i debbono essere assoggettate dapprima alle sole condizioni

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \bar{\beta}_{ki} H_k \qquad (i \neq k) \,.$$

e in ogni caso l'espressione

$$dz = \sum_{\lambda} H_\lambda Z_\lambda \, du_\lambda$$

è il differenziale esatto di una funzione z che rappresenta la distanza di un punto generico $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ da un iperpiano *fisso* normale alla direzione $(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$. Dimostriamo che: *si possono ulteriormente fissare le* H_i *in guisa da soddisfare alla relazione*

$$\text{(III)} \qquad H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 + K z^2 = \text{cost} \,.$$

E infatti, derivando questa rapporto ad u_i, otteniamo

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \bar{\beta}_{i\lambda} H_\lambda - K z Z_i \,,$$

sicchè, riunendo le equazioni ottenute in tutte le incognite

$$z \,, \; Z_i \,, \; H_i \,, \; \bar{\beta}_{ik} \,,$$

veniamo a formare il sistema seguente:

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\, \mathrm{Z}_i \\
&\frac{\partial \mathrm{Z}_i}{\partial u_k} = \bar{\beta}_{ik}\, \mathrm{Z}_k \ , \quad \frac{\partial \mathrm{Z}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \bar{\beta}_{\lambda i}\, \mathrm{Z}_\lambda \\
&\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} = \bar{\beta}_{ki}\, \mathrm{H}_k \ , \quad \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \bar{\beta}_{i\lambda}\, \mathrm{H}_\lambda - \mathrm{K}\, z\, \mathrm{Z}_i \\
&\frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_l} = \bar{\beta}_{il}\, \bar{\beta}_{lk} \\
&\frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \bar{\beta}_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \bar{\beta}_{\lambda i}\, \bar{\beta}_{\lambda k} = 0 \\
&\frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \bar{\beta}_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \bar{\beta}_{i\lambda}\, \bar{\beta}_{k\lambda} + \mathrm{K}\, \mathrm{Z}_i\, \mathrm{Z}_k = 0 \, .
\end{aligned}
\right.
$$

Questo è, come facilmente si verifica, un sistema completamente integrabile. Dunque: *esistono nello spazio* S_n *euclideo sistemi* n^{pli} *ortogonali che soddisfano alla condizione* (III); *essi dipendono da* $n(n-1)$ *funzioni arbitrarie.*

Se si suppone in particolare K negativa e si assume nulla la costante del secondo membro nella (III), si ritorna ai sistemi ortogonali caratterizzati dalla (II).

Da ultimo osserveremo che si ottengono ulteriori classi di sistemi n^{pli} ortogonali degli spazî a curvatura costante col procedimento seguente. Insieme con le (A), che valgono per un sistema ortogonale nello spazio S_n a curvatura costante K, immaginiamo di scrivere le analoghe, che distingueremo con accenti, per un altro spazio S'_n a curvatura costante K', e riuniamo i due sistemi di formole ponendo inoltre

$$\beta'_{ik} = \beta_{ki} \, .$$

Veniamo così a formare il sistema

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, \mathrm{H}_k \ , \quad \frac{\partial \mathrm{H}'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\, \mathrm{H}'_k \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} + \mathrm{K}\, \mathrm{H}_i\, \mathrm{H}_k = 0 \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\, \beta_{k\lambda} + \mathrm{K}'\, \mathrm{H}'_i\, \mathrm{H}'_k = 0 \, .
\end{aligned}
\right.
$$

Questo, comunque si prendono le costanti K, K', è sempre, nelle funzioni incognite (H_i, H'_i, β_{ik}), un sistema completamente integrabile, come risulta dai calcoli stessi eseguiti al n. 3 per il sistema (B).

Ad ogni soluzione (H_i, H'_i, β_{ik}) delle (13) corrisponde una *coppia* di sistemi ortogonali, l'uno nello spazio S_n, l'altro nello spazio S'_n, definito rispettivamente da

$$ds^2 = \sum_\lambda H_\lambda^2 \, du_\lambda^2 \quad , \quad ds'^2 = \sum_\lambda H_\lambda'^2 \, du_\lambda^2 \; ;$$

e le rotazioni sono comuni ai due sistemi, però con inversione degli indici.

Se in queste formole generali poniamo

$$K' = K \quad , \quad H'_i = H_i \, ,$$

onde segue

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} \, ,$$

le (13) si riducono al sistema *completamente integrabile*

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \\ & \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \qquad (\beta_{ik} = \beta_{ki}) \\ & \sum_\lambda \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_\lambda} + K H_i H_k = 0 \, . \end{aligned} \right.$$

I sistemi n^{pli} ortogonali corrispondenti dello spazio S_n a curvatura costante K sono gli analoghi di quei sistemi (E) dell'ordinario spazio S_3 euclideo, a cui Darboux ha dedicato i cap. VIII et IX (livre III) delle sue *Leçons*.

Siccome $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, indi

$$\frac{\partial H_i^2}{\partial u_k} = \frac{\partial H_k^2}{\partial u_i} \, ,$$

si può porre

$$H_i^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n) \, ,$$

essendo Θ una funzione di $u_1, u_2, \dots u_n$. Così il ds^2 dello spazio prende la forma *caratteristica* per questi sistemi (E),

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} du_2^2 + \cdots + \frac{\partial \Theta}{\partial u_n} du_n^2 \, .$$

Ancor più in particolare, se si fa $K = 0$, si hanno i sistemi (E) nell' S_n euclideo, ai quali si estendono subito i metodi di trasformazione del caso ordinario $n = 3$ (Darboux, loc. cit.).